Lie 群与 *Lie* 代数简介

安徽大学数学系

李世雄

2001．9

（一） 引言

Lie 群和 *Lie* 代数的理论是近代数学中的一个重要分支，是挪威数学家 **M.S.Lie**（1842-1899）在十九世纪后期创建的。由于受 **Lagrange**、**Abel**、**Galois** 等学者用群论方法研究代数方程求解问题得到巨大成功的启发，**Lie** 提出了用变换群的方法来研究微分方程的求解问题及用无穷小变换来研究变换群的方法。近代的 *Lie* 群与 *Lie* 代数理论就是在 **Lie** 的开创性工作的基础上发展起来的。群（变换群）的概念起源于对几何图像对称性的研究，虽然历史悠久，但未成为一种解决问题的系统方法。这一情况到了十八世纪后期才发生了本质的变化。法国数学家 **J.Lagrange**(1736-1813)在研究代数方程求解问题时认识到根的排列与置换理论是解代数方程的关键所在，开创了用置换群的理论来研究代数方程求解问题的新阶段。在此基础上，挪威数学家 **N.H.Abel**(1802-1829)与法国数学家 **E.Galois**(1811-1832)发展和应用了群论的方法彻底解决了代数方程用代数方法求解问题。（关于这方面的进一步介绍，有兴趣的学者可以参看附录 1：用根的置换理论解二、三次代数方程）

与代数方程有关的置换群是有限群。（即由有限个元素构成的群）对这种群的研究纯属代数问题。而 **Lie** 引进的与微分方程有关的变换群则是由有限个连续参数所确定的变换所构成的无限群。这种确定群的元素的连续变化的参数可以看成广义的坐标。所以 **Lie** 研究的变换群除了群的结构外，还具有流形的结构，其元素可以看成是流形上的点。（关于流形的概念可参看：李世雄. 波动方程的高频近似与辛几何. 第四章）因而 *Lie* 群是代数、几何与分析的有机结合，其理论和方法对近代数学的许多分支有重要的影响和作用。

（二）*Lie* 群的概念

群的定义：设 G 是一个集合，若满足下列 4 个条件，则称 G 为一个群（Group）。

（1） G 中有一种对应规则（通称为乘法）：对 G 中任意二元素 $g,h\in G$，对应 G 中的一元素 k（称为 g 与 h 之乘积）记为，$k=g\circ h($ 或 $gh)$。

此性质称为群的乘法的封闭性。

（2） 乘法满足结合律：对 G 中任意三元素 g,h,k 满足：$(gh)k=g(hk)$。

（3） G 中存在一个幺元 e，使对 G 中任意元素 g，均有：$ge=eg=g$。

（4） G 中每一元素 g，均存在一逆元 g^{-1}，使：$gg^{-1}=g^{-1}g=e$。

群的乘法一般不满足交换律。若一群 G 的任意两个元素的乘法均可交换：$gh=hg$，$\forall g,h\in G$，则称 G 为可交换群或 **Abel** 群。

子群：设 G 为一群，H 为 G 的一个子集 $(H\subseteq G)$，若 H 也是一个群（按照 G 中的规定的乘法），则称 H 是 G 的子群。

例1． 全体实数 $\mathbb{R}$（或复数 $\mathbb{C}$），对加法构成一 **Abel** 群。（此时群的乘法就是普通的加法）

设 E 表示有理数全体，则 E 是 $\mathbb{R}$ 的子群。

设 V 表示全体偶数，则 V 是 E 的子群，当然也是 $\mathbb{R}$ 的子群。（问题：无理数全体，或奇数全体是否 $\mathbb{R}$ 的子群？）

例2． 全体实数除去零：$\mathbb{R}_0$（或全体复数除去 0：$\mathbb{C}_0$）对乘法构成一 **Abel** 群。（这时群的乘法就是普通的乘法）

（问题：全体实数 $\mathbb{R}$（或全体复数 $\mathbb{C}$）对普通的乘法运算不构成群，这是为什么？）

例3． $G=\{1,-1,i,-i\}$ 对复数乘法运算构成一有限 **Abel** 群。这里 1 是 G 的幺元，-1 的逆元就是-1，i 与-i 互为逆元。

例4． 行列式不为零的 n 阶实矩阵全体对矩阵乘法构成一群——n 阶全线性群，记为：$GL(n,R)$。它的元素由 n^2 个独立实参数所确定。按照下面将要给出的定义可见

$GL(n,R)$是一个n^2维（不可交换）*Lie* 群。

例5. 行列式为 1 的 2 阶实矩阵全体对矩阵乘法构成一群——二阶（实）特殊线性群 SL（2，R）。因为二阶实矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$由四个实数$a,b,c,d$构成，由于行列式为 1 的要求，使他们必须满足条件：$ad-bc=1$。所以$SL(2,R)$中的元素由 3 个独立的实参数所确定。按照下面将要给出的定义可见$SL(2,R)$是一个三维（不可交换）Lie 群，而且它是$GL(2,R)$的子群。

例6. 行列式为 1 的n阶实矩阵全体对称矩阵乘法构成一群——n阶特殊线性群$SL(n,R)$，这是一个n^2-1维（不可交换）的Lie群，而且是$GL(n,R)$的子群。

例7. 行列式不为 0 的n阶复矩阵全体对矩阵乘法构成一群——n阶（复）全线性群$GL(n,C)$。

行列式为 1 的n阶复矩阵全体对矩阵乘法构成一群——n阶（复）特殊线性群$SL(n,C)$。$GL(n,C)$是$2n^2$阶（不可交换）*Lie* 群。$SL(n,C)$是$2n^2-2$阶（不可交换）*Lie* 群。

显然，$GL(n,R)$与$SL(n,C)$都是$GL(n,C)$的子群，$SL(n,R)$是$SL(n,C)$的子群。

上面我们所举的群的例子（除例 1 外）其元素均为矩阵。（实数或复数可看成是一阶矩阵）运算法则均为矩阵乘法。这种群称为线性群。线性群是最重要的也是最有代表性的一类*Lie*群。今后在应用中遇到的*Lie*群基本均为线性群。可以说掌握了线性群也就基本上掌握了*Lie*群。下面我们来给出*Lie*群的定义。

***Lie* 群的定义**：设G是一个r维流形，同时G又是一个群，其幺元记为e。因e又是流形G中的一点，所以可取定一个包含e的局部坐标邻域U；在U中取定坐标系$\{U,\varphi\}$。设取e为坐标原点：

$$\varphi(e)=(0,0,\cdots,0) \tag{2.1}$$

对U中的三元素g,h,k，设其坐标分别为：

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= (x_1, x_2, \cdots, x_r), \\ \varphi(h) &= (y_1, y_2, \cdots, y_r), \\ \varphi(k) &= (z_1, z_2, \cdots, z_r).\end{aligned} \tag{2.2}$$

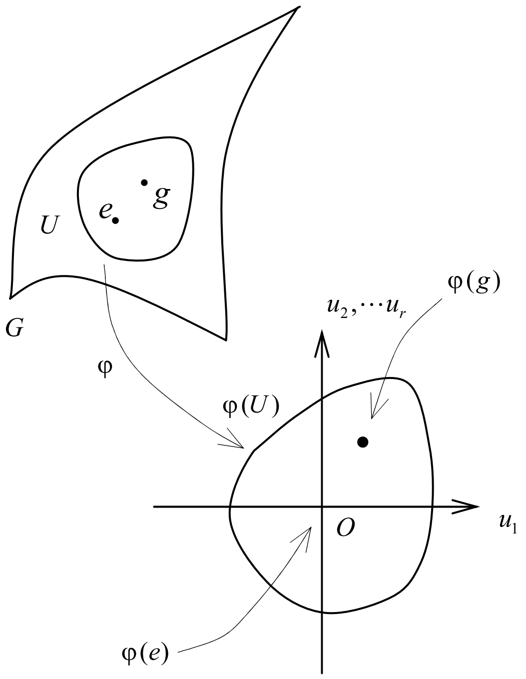

图2.1

则群的乘法 $k = gh$ 可以用相应的坐标来表示：

$$\begin{aligned}z_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_r; y_1, \cdots, y_r), \\ z_2 &= f_2(x_1, \cdots, x_r; y_1, \cdots, y_r), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_r &= f_r(x_1, \cdots, x_r; y_1, \cdots, y_r).\end{aligned} \tag{2.3}$$

（(2.3) 在不致引起混淆时可简记为 $z = f(x, y)$）。

我们要求这 r 个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 是无限次可导的，即光滑的。这 r 个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 称为 G 的乘法函数。它完全确定了群 G 的结构。这样的群 G 就称为一个 r 维 *Lie* 群。

乘法函数的基本性质：

（**1**） 因为幺元 e 的坐标为 $(0, 0, \cdots, 0)$，所以 $ex = xe = x$，用坐标表示出来就是：

$$f_j(x_1, \cdots, x_r; 0, \cdots, 0) = f_j(0, \cdots, 0; x_1, \cdots, x_r) = x_j \quad j = 1, 2, \cdots, r \tag{2.4}$$

（这一关系可简记为：$f(x, 0) = f(0, x) = x$）。

（**2**） 群的乘法满足结合律的要求：$(gh)k = g(hk)$，用坐标表示出就是：

$$\begin{aligned}&f_j(f_1(x_1, \cdots x_r; y_1, \cdots, y_r), \cdots, f_r(x_1, \cdots x_r; y_1, \cdots, y_r); z_1, \cdots, z_r) \\ &= f_j(x_1, \cdots x_r; f_1(y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_r), \cdots, f_r(y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_r)) \\ &\qquad j = 1, 2, \cdots, r.\end{aligned} \tag{2.5}$$

（这一关系可简记为：$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)).$）

（**3**）G 的每一元素 g 都有唯一的逆元 g^{-1}，设 g^{-1} 的坐标为 $(\tilde{x}_1, \cdots \tilde{x}_r)$，则关系式 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ 用坐标表示出就是：

$$f_j(x_1,\cdots,x_r;\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r)=f_j(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r;x_1,\cdots,x_r)=0 \\ j=1,2,\cdots,r. \tag{2.6}$$

（这一关系可简记为 $f(x,\tilde{x})=f(\tilde{x},x)=0.$）。

直接用乘法函数来研究 Lie 群是相当困难的、复杂的。**Lie** 的重要贡献在于引进了无穷小变换的概念，使问题大为简化。这就是在后面要介绍的 Lie 代数的理论。

我们先用一些比较简单的 Lie 群来阐明上面引进的有关 Lie 群的一些概念。

例 8．$T_2=\left\{\left.\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$。这个群的元素由二个独立实参数 x_1,x_2 所决定。所以，T_2 是一个二维流形。现在来验证 T_2 满足群的要求。

（1） 先来验证封闭性：

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{y_1} & y_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{x_1}e^{y_1} & e^{x_1}y_2+x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1}y_2+x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{z_1} & z_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in T_2$$

我们可以将 T_2 的乘法函数具体写出：

$$\begin{aligned} z_1&=f_1(x_1,x_2;y_1,y_2)=x_1+x_2, \\ z_2&=f_2(x_1,x_2;y_1,y_2)=e^{x_1}y_2+x_2. \end{aligned}\tag{2.7}$$

显然，函数 f_1,f_2 是无限次可微的。

（2） 因 T_2 之乘法就是矩阵的乘法，当然满足结合律，不必再验证。

（3） 易见 $\begin{pmatrix} e^{0} & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是 T_2 的幺元。

（4）

$$\because \begin{pmatrix} e^{-x_1} & -x_2e^{-x_1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-x_1} & -x_2e^{-x_1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的逆元为$\begin{pmatrix} e^{-x_1} & -x_2e^{-x_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

因为

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{y_1} & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} e^{x_1+y_1} & y_2e^{x_1}+x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

又 $$\begin{pmatrix} e^{y_1} & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} e^{x_1+y_1} & x_2e^{y_1}+y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

可见T_2是一个二维不可交换的*Lie*群。

例9. 绕固定轴的旋转群$SO(2)$。其元素$g(\theta)$可用一参数（转动角θ）来确定。这里θ的取值范围为$[0,2\pi)$。群的“乘法”规定为相继作二个转动，即将相应的参数相加。但若相加之和大于2π时，应减去2π使参数值仍保持在$[0,2\pi)$之中。（因转2π角度等于不转动，所以参数减去2π对转动之结果不影响）：

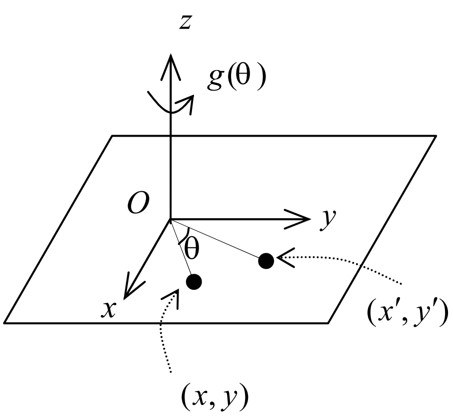

图 2.2

$$g(\theta_1)g(\theta_2)=g(\theta_{12}),$$

这里$\theta_{12}=\theta_1+\theta_2 \pmod{2\pi}$

容易验证T_2是一个一维可交换*Lie*群。

我们也可以用矩阵（线性变换）的形式来表示$SO(2)$：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g(\theta)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

例10. 三维旋转群$SO(3)$。三维空间绕固定点的一个转动$g\in SO(3)$，可用单位向量$\vec{n}$表示其转动轴OP的方向，一实数θ表示绕OP轴转动的角度。于是g可用$(\vec{n},\theta)$来确定。由于空间单位向量$\vec{n}$由二个独立参数确定，所以$SO(3)$的元素由三个独立参数所确定。因空间任意转动可用绕某一轴绕顺时针方向转动一个角度θ $(0\le\theta\le\pi)$来完成。所以$SO(3)$可以用一个以π为半径的球来表示。此球内的一点Q表示一个

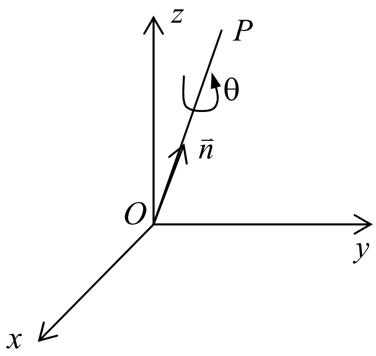

图 2.3

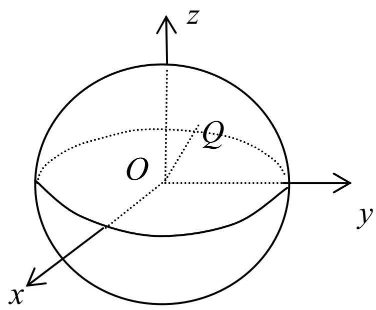

图 2.4

绕 $\overline{OQ}$ 为轴转动角度为 $|OQ|$ 的转动。但要注意，此球面上的对径点对应的是群 $SO(3)$ 的同一元素，即 $(\vec{n}_0,\pi)$ 与 $(-\vec{n}_0,\pi)$ 表示同一转动。(这里 $\vec{n}_0$ 为任意单位向量)。所以我们可以用一个半径为 π ，并将球面的对径点叠合起来的球来表示 $SO(3)$ 。这样的模型对研究群 $SO(3)$ 的整体构造非常有用，(利用这一模型不难证明 $SO(3)$ 作为一个流形不是单连通的)，但对处理一些实际问题却很不方便。通常对 $SO(3)$ 我们习惯用 *Euler* 角 (θ,φ,ψ) 来描述一个转动。(见图 2.5)

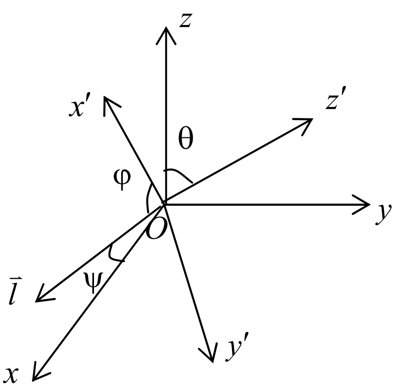

图 2.5

$$(x,y,z)\xrightarrow{g}(x',y',z')$$

用矩阵形式表出：

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

现在用 *Euler* 角来表示出 g_{ij}， $i,j=1,2,3.$

由(2.8)知：

$$g_z^{\ \varphi}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad g_x^{\ \theta}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$g_z^{\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

(这里 g_z^{φ} 表示绕 z 轴转 φ 角，⋯）

于是：

$$g = g_z^{\psi} g_x^{\theta} g_z^{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

因此 $SO(3)$ 的元素也可由 (φ,θ,ψ) 三个独立参数（坐标）确定。不难验证 $SO(3)$ 是一个三维（不可交换）*Lie* 群。

为了便于今后将 $SO(3)$ 推广到 n 维的情况，我们在介绍另一种刻划 $SO(3)$ 的方法。

三维欧氏空间 $\mathbb{R}_3$ 的内积：

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{3} x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 , \tag{2.11}$$

线性变换：$g = (g_{ij})$ $\qquad x \xrightarrow{g} x' = gx = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$g \in SO(3) \Leftrightarrow < gs, gy >=< x, y > \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_3 \quad 且 \det g > 0 \tag{2.12}$$

通过直接计算不难验证：$< gx, gy >=< x, g^t gy >$。

这里 g^t 表示 g 之转置，即 $g_{ij}^{\ t} = g_{ji}$。

由 $< x, g^t gy >=< x, y > \qquad \forall x, y \in \mathrm{R}_3$

即得：$\qquad g^t g = I$，这里 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$——单位矩阵。

所以，$g \in SO(3) \Leftrightarrow g^t g = gg^t = I, \qquad \det g > o.$ $\qquad$ (2.13)

（仅满足 $g^t g = gg^t$ 的线性变换所构成的群称为 $O(3)$ ——正交群， $SO(3)$ 也称为特殊正交群）

3 阶矩阵 g 共有 9 个元素（实参数），条件 $gg^t = g^t g = I$ 具体写出来，共有 6 个方程要满足：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{3} g_{ij} g_{ij} = 1, \quad i = 1,2,3 \\ &\sum_{j=1}^{3} g_{ij} g_{kj} = 0, i < k.\end{aligned} \tag{2.14}$$

所以 $g_{ij}(i, j = 1,2,3)$ 9 个元素中可以选取 3 个作为独立参数。这又一次阐明了 $SO(3)$ 是一个三维 Lie 群。

例 11． n 维特殊正交群 $SO(n)$

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}_n$ 的内积：

$x = (x_1, \cdots, x_n)$， $y = (y_1, \cdots, y_n)$

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{2.15}$$

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \left(g_{ij}\right), \quad x \overset{g}{\mapsto} x' = gx$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$g \in SO(n) \Leftrightarrow < gx, gy >=< x, y >, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_n, \det g > 0 \tag{2.17}$$

因 $< gx, gy >=< x, g^t gy >$

所以 $g \in SO(n) \Leftrightarrow g^t g = gg^t = I, \quad \det g > 0$ (2.18)

（这里 g^t 为 g 的转置，即 ${g_{jk}}^t = g_{kj}$ ）。

不难验证 $SO(n)$ 是一个 $n(n-1)/2$ 维（不可交换）*Lie* 群。

若仅要求 $g'g = gg' = I$ 而不要求 $\det g > 0$，这样的群称为正交群，并记为 $O(n)$，即

$$g \in O(n) \Leftrightarrow g^t g = gg^t = I \text{。} \tag{2.19}$$

$O(n)$ 也是一个 $n(n-1)/2$ 维（不可交换）*Lie* 群。

（三） 指数映射与单参数子群

前面我们已提到了群的乘法一般不可交换（线性群的元素是线性变换——矩阵，矩阵的乘法一般不可交换）所以 *Lie* 群用以刻划其乘法规则的乘法函数是比较复杂的。直接用乘法函数来研究 *Lie* 群是走不太远的！**Lie** 的重要贡献在于引进了无穷小变换的概念，并证明了 *Lie* 群的主要特征（局部性特征）都可以通过无穷小变换来刻划。也就是说要研究 *Lie* 群在幺元附近的性质只要研究其相应的无穷小变换就可以了。而无穷小变换也就是 *Lie* 代数。它是一个有特殊结构的线性空间，对它的研究当然要比直接研究 *Lie* 群方便、简单得多。在讨论 *Lie* 代数以及 *Lie* 代数与 *Lie* 群的关系之前，我们先来介绍一下有关的重要概念及其性质。（在今后我们只讨论线性群，因此群的元素总是矩阵，群的乘法一定是矩阵的乘法）

指数映射：

我们知道，即使是一阶矩阵（数）其乘法运算也要比加法运算复杂。熟知的指数和对数运算就将较复杂的乘法运算转化为较简单的加法运算：若 $y_1 = e^{x_1}$， $y_2 = e^{x_2}$，则

$$y_1 y_2 = e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

这样就把 y_1 与 y_2 的乘法转化为 x_1 与 x_2 的加法。而 x 与 y 的关系又可用对数函数联系起来：

即　　若 $x = \log y$，则 $y = e^x = e^{\log y}$。

现在要问：上面将数的乘法转化为加法的方法能否推广到矩阵的乘法？

回答是：原则上是可以的，但问题要复杂得多。

首先来定义矩阵的指数函数与对数函数。在微积分中我们知道可用幂级数来定义指数和对数函数：

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad (-\infty < x < \infty)$$

对任意的 n 阶矩阵 A，我们也可以定义其指数映射为：

$$e^A = \exp(x) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \tag{3.1}$$

可以证明这一级数对任何矩阵 A 都是收敛的。

设 O 是零矩阵（一切元素均为 0）的矩阵，则显然有：

$$e^O = \exp(O) = I.$$

又若：$A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$， $x \in \mathbb{R}$，现在来计算 e^A，

$$A^2 = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ -x^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & -x^5 \\ x^5 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{aligned} \exp A = e^A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ -x^3 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & -x^5 \\ x^5 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

再利用 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$，

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

即得：

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}。$$

现设 $X = e^A$，$Y = e^B$，由于矩阵的乘法一般不可交换，显然对实数成立的公式 $e^a e^b = e^{a+b}$ 对矩阵一般是不成立的。（因为否则 $XY = e^A e^B = e^{(A+B)} = e^{(B+A)} = e^B e^A = YX$）。

但若 A 与 B 的乘法可交换：$AB = BA$，则有：$e^A e^B = e^{(A+B)}$。 (3.2)

证：

$$\begin{aligned} e^{(A+B)} &= I + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2!} + \frac{(A+B)^3}{3!} + \cdots \\ &= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2 B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

（这里利用了：

$$\begin{aligned} AB = BA \Rightarrow (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

）

$$e^A e^B = (I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots)(I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \cdots)$$
$$= I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \cdots$$

故得：$e^{(A+B)} = e^A e^B$ 证毕。

利用上面的结果容易证明，设 A 为任意 n 阶矩阵，则 $\det(e^A) \neq 0$。这里因为 A 与 $-A$ 可交换，所以：

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}，\ \det(I) = \det(e^A e^{-A}) \Rightarrow$$

$$1 = (\det(e^A))(\det e^{-A}) \qquad \therefore\ \ \det e^A \neq 0.$$

又若 A 为任一实反对称矩阵，即 $A^t = -A.$，则 $e^A \in O(n)$， (3.3)

这是因为：$I = e^0 = e^{(A+A^t)} = e^A e^{A^t} = e^A (e^A)^t$ 由(2.18)知：$e^A \in O(n).$

若 B 为非奇矩阵，即 $\det B \neq 0$。故存在 B^{-1}，使 $BB^{-1} = B^{-1}B = I.$ 易证：

$$e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}. \tag{3.4}$$

这是因为，$(BAB^{-1})^n = (BAB^{-1})(BAB^{-1})\cdots(BAB^{-1}) = BA^n B^{-1}$

$B(C+D)B^{-1} = BCB^{-1} + BDB^{-1}$ 再利用 $\exp$ 之定义（3.1）

即得 $\quad e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}.$

对数映射：

在微积分中，我们利用幂级数定义对数函数：

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$
$$|x-1| < 1.$$

对 n 阶矩阵 A 我们也可以定义其对数映射为：

$$\log A = (A-I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \frac{(A-I)^4}{4} + \cdots \tag{3.5}$$

为了保证(1-24)右方级数的收敛，要求矩阵 $I-A$ 之每一元素之绝对值均小于 $\frac{1}{n}$。也就

是说要求 A 是与幺元 I 邻近的元素。

在微积分中熟知 e^x 与 $\log x$ 互为反函数：$\log e^a = a$，$e^{\log x} = x$。对矩阵的指数与对应映照也有类似的关系式：

设 X 与 I 邻近，A 与 O 邻近，则有：

① $\log e^A = A.$

② $e^{\log X} = X.$ (3.6)

先证①：由(3.1)得：

$$e^A - I = A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

由(3.5)得：

$$\begin{aligned}\log e^A &= (A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots) - \frac{1}{2}(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots)^2 + \\ &\frac{1}{3}(A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots)^3 - \cdots = \\ &= A + (\frac{A^2}{2!} - \frac{A^2}{2}) + (\frac{A^3}{3!} - \frac{A^3}{2} + \frac{A^3}{3}) + \cdots = A.\end{aligned}$$

再证②：由(3.5)得：

$$\log X = (X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \cdots$$

$$\begin{aligned}e^{\log X} &= I + \{(X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \cdots\} \\ &+ \frac{1}{2!}\{(X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \cdots\}^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\{(X-I) - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^3}{3} - \cdots\}^3 + \cdots \\ &= X - \frac{(X-I)^2}{2} + \frac{(X-I)^2}{2} + \{\frac{(X-I)^3}{3} - \frac{(X-I)^3}{2} + \frac{(X-I)^3}{6}\} + \cdots \\ &= X.\end{aligned}$$

证毕.

与指数映射类似，对实数成立的公式 $\log(xy) = \log x + \log y$，只有当 $\log X$ 与 $\log Y$ 可交换且 X 与 Y 均与 I 邻近时才有相应的关系式：

设 X 与 Y 均与 I 邻近，且 $\log X$ 与 $\log Y$ 的乘法可交换，则：

$$\log(XY) = \log X + \log Y \qquad (3.7)$$

证： $e^{\log(XY)} = XY = e^{\log X}e^{\log Y} = e^{\log X + \log Y}$ 证毕。

单参数子群 再来引进一个重要的概念：*Lie* 群的单参数子群。

设 G 为一 *Lie* 群，$\gamma(t)\ (-\infty < t < \infty)$ 为 g 中过幺元 e 的一条曲线，则对每一取定的 $t_0 \in \mathbb{R}, \gamma(t_0)$ 是 G 中的一个元素。

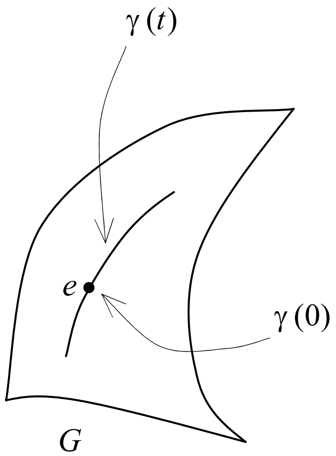

图3.1

设参数 t 满足：

$$\gamma(t_1+t_2)=\gamma(t_1)\gamma(t_2) \tag{3.8}$$

则称 $\gamma(t)$ 是 G 中的一个单参数子群。

因 $\gamma(t)=\gamma(0+t)=\gamma(0)\gamma(t)$，所以 $\gamma(0)=e$。

又因 $\gamma(t)\gamma(-t)=\gamma(t-t)=\gamma(0)=e$，

所以 $\gamma(t)$ 之逆元为 $\gamma(-t)$。

由于 $\gamma(t_1)\gamma(t_2)=\gamma(t_1+t_2)=\gamma(t_2+t_1)=\gamma(t_2)\gamma(t_1)$

所以 $\gamma(t)(-\infty < t < \infty)$ 是 G 的一个单参数子群。

我们将 *Lie* 群 G 的一个单参数子群看成流形 G（对二维 *Lie* 群，可将 G 看成为一张曲面）中过 e 处的一条曲线。从微积分知道这只要对 $\gamma(t)$ 在 $t=0$ 处求导即得 $\gamma(t)$ 在 $t=0$ 处的切向量，$\gamma'(0)=\left.\dfrac{d\gamma(t)}{dt}\right|_{t=0}$。（因为我们只讨论线性群，所以 $\gamma(t)$ 是矩阵，其元素是 t 的函数，$\gamma'(t)$ 表示对 $\gamma(t)$ 的每一元素求导所得的矩阵）。由于：

$$\gamma(t+s)=\gamma(t)\gamma(s)$$

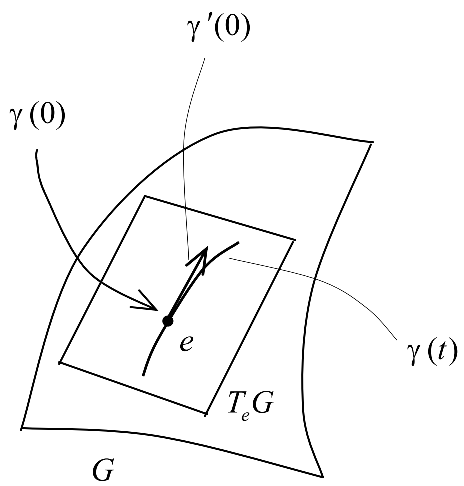

图 3.2

两边对 s 求导，并令 $s=0$，得

$$\gamma'(t)=\gamma(t)\gamma'(0) \tag{3.9}$$

这是一组常微分方程，不难验证其解为：

$$\gamma(t)=\exp(t\gamma'(0)) \tag{3.10}$$

可见单参数子群必可表示为指数映射的形式。

而且从(3.10)可见，对 G 在幺元处的切空间 T_eG（平面）上的任一向量 $A=\gamma'(0)$，就有 G 中的一元素 $\gamma(1)=\exp(\gamma'(0))$ 与之对应。反之，若给定 G 中

与幺元（$=I$）邻近的一个元素 g，（因假定 G 是线性群，所以 g 是矩阵）根据公式(3.5)定义 $A=\log g$，则由 $e^A=g$ 知，A 为 G 在 e 处之切向量，e^{tA} 为以 A 为单位切向量的单参数子群。因此，对 G 中与幺元 e 邻近的一个元素就有 $T_e(G)$（G 在幺元处的切空间）中一向量 A 与之对应，也就是说，设 $U\subset G$ 中包含 e 的一个适当邻域，我们建立了一种对应关系：

$$\begin{aligned}
&G\supset U \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} T_e(G)\\
&\quad g\to A=\log g\\
&\quad e^A\leftarrow A
\end{aligned}\tag{3.11}$$

这种对应将我们研究的对象从 *Lie* 群 G 转移到 G 在幺元 e 处的切空间 $T_e(G)$。$T_e(G)$ 是由向量构成的线性空间，其结构及运算当然要比 *Lie* 群 G 要简单得多，但由于群的乘法运算（对线性群而言是矩阵的乘法）一般不可交换，因此线性空间中向量之间可交换的加法运算，肯定不能完全刻划群的乘法运算，即：

$$\begin{array}{lcl}
T_e(G) & & G\\
A & \text{——} & e^A\\
B & \text{——} & e^B\\
\multicolumn{3}{l}{A+B\to e^{A+B}\neq e^Ae^B}
\end{array}\tag{3.12}$$

为此我们除上述对应关系外，还要在 $T_e(G)$ 中引入一种新结构来反映 G 中乘法运算的不可交换性，有了这种新结构的线性空间 $T_e(G)$，就是我们在下面要介绍的 *Lie* 代数。

（四） *Lie* 群与 *Lie* 代数

Lie 的三基本定理与结构常数

从上面的讨论我们知道，一般 $e^A e^B \neq e^{A+B}$，现在的问题是 $e^A e^B = e^?$，这一问题的回答当然与群的乘法的不可交换性有关。

设 $A, B \in T_e(G)$，取参数 t，使 $|t|$ 适当小，这样 e^{tA} 与 e^{tB} 均为 *Lie* 群 G 中与幺元 e 邻近的元素。（这样可以保证问题涉及的级数的收敛性）。为了研究 e^{tA} 与 e^{tB} 之间的乘法的不可交换性，我们来研究：

$$g(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-tA} e^{-tB}, \tag{4.1}$$

显然，当 e^{tA} 与 e^{tB} 可交换时，$g(t) = e = I$（单位矩阵）。而当他们的乘法不可交换时，$g(t)$ 与幺元 e（$= I$ 单位矩阵）的偏离程度反映了 e^{tA} 与 e^{tB} 的乘法与可交换乘法的差异大小。现在我们来具体计算 $g(t)$。

$$\begin{aligned}
g(t) &= e^{tA} e^{tB} e^{-tA} e^{-tB} \\
&= (I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots)(I + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \cdots) \\
&\quad (I - tA + \frac{t^2}{2!}A^2 - \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots)(I - tB + \frac{t^2}{2!}B^2 - \frac{t^3}{3!}B^3 + \cdots) \\
&= \{I + t(A+B) + t^2(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}) + t^3(\frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6}) + O(t^4)\} \\
&\quad \{I - t(A+B) + t^2(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}) - t^3(\frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6}) + O(t^4)\} \\
&= I + t(A + B - A - B) + t^2(AB - BA) + t^3(\frac{A^2B}{2} - \frac{AB^2}{2} - \\
&\quad - \frac{B^2A}{2} + \frac{BA^2}{2} - ABA + BAB) + O(t^4) \\
&= I + t^2[A,B] + \frac{t^3}{2}([A,[A,B]] - [B,[B,A]]) + O(t^4)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

这里引进了一种重要的新记号：$[,]$，对任意两个 n 阶矩阵 A,B，$[A,B]\overset{定义}{=}AB-BA$。(4.3)
（这里 AB 与 BA 按通常定义的矩阵乘法相乘）。

我们称这种运算为 *Lie* 乘法。$[A,B]$ 为矩阵 A,B 的 *Lie* 乘积，这是下面我们要定义的 *Lie* 代数的基本运算。

由(4.2)可得，

$$\frac{g(t)-I}{t^2}=[A,B]+O(t) \tag{4.3}$$

因此，
$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-I}{t^2}=[A,B], \tag{4.4}$$

由此可见，*Lie* 群 G 中的元素 e^{tA} 与 e^{tB} 的乘法的不可交换性的程度（当 $|t|$ ）很小时）主要取决于 $[A,B]$。

现在在(4.3)中作变量代换 $t=\sqrt{s}$，并利用 $I=g(0)=e$，则
(4.3)化为

$$\frac{g(\sqrt{s})-g(0)}{s}=[A,B]+O(\sqrt{s}) \tag{4.5}$$

因此
$$\lim_{s\to 0}\frac{g(\sqrt{s})-g(0)}{s}=[A,B] \tag{4.6}$$

这说明 $[A,B]$ 是 *Lie* 群 G 中过幺元的曲线 $g(\sqrt{s})$ 在幺元处的切向量，即 $[A,B]\in T_e(G)$。

∵ A,B 是 $T_e(G)$ 中的任意两个切向量。所以我们证明了：

$\forall A,B\in T_e(G)$。$[A,B]\in T_e(G)$。

也就是说我们引入的 *Lie* 乘法，对 $T_e(G)$ 这个向量空间的封闭性。

现在可以来回答 $e^{tA}e^{tB}=e^{?}$ 的问题了。

令：$e^{tA}e^{tB}=e^{tC}$，

则：

$tC=\log e^{tC}=\log e^{tA}e^{tB}$

$$
\begin{aligned}
&= \log\{(I + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \\
&\qquad + \frac{t^3}{6}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + O(t^4)\} \\
&= t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \frac{t^3}{6}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + O(t^4) \\
&\quad - \{t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\}^2 / 2 + \\
&\quad + \{t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3)\}^3 / 3 + O(t^4) \\
&= t(A+B) + \frac{t^2}{2}(AB - BA) + \frac{t^3}{12}(A^2B - ABA - ABA + BA^2 \\
&\quad - B^2A + BAB + BAB - AB^2) + O(t^4) \\
&= (tA + tB) + \frac{1}{2}[tA, tB] + \frac{1}{12}[tA, [tA, tB] - tB, [tB, tA]] + O(t^4) \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

由此可见，只要有了*Lie*乘法，$T_e(G)$中知道了与e^{tA}, e^{tB}相对应的元素tA, tB，由公式(4.7)即可求得$T_e(G)$中与$e^{tA}e^{tB}$相对应的元素。由此可见，*Lie*群G在幺元e处的切空间（这是一个线性空间）引进了*Lie*乘法就能正确的反映*Lie*群中的乘法运算。

由于我们讨论的*Lie*群都是线性群，其元素均为矩阵。因而其在幺元处切向量也是矩阵。因此上面*Lie*乘法的定义：$[A,B] = AB - BA$中AB与BA即通常的矩阵乘法。但是若G是一般的抽象的*Lie*群（其元素未必是矩阵），则相应的向量空间$T_e(G)$的元素也未必是矩阵。此时，AB, BA表示什么意义需要进一步讨论阐明。有兴趣的得学者可参阅有关*Lie*群的专著。

容易验证上面在$T_e(G)$中定义的*Lie*乘法$[\,,]$具有下列性质：

① $[A,B] = -[B,A]$　（反对称） (4.8)

$$
\left.\begin{array}{ll}
② & \text{设}k\text{为实数,则}k[A,B] = [kA,B] = [A,kB] \\
③ & [A+B,C] = [A,C] + [B,C], \\
 & [A,B+C] = [A,B] + [A,C].
\end{array}\right\}\text{（线性）} \qquad (4.9)
$$

④ $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$（*Jacobi*恒等式） (4.10)

我们称有了*Lie*乘法的向量空间$T_e(G)$构成一个*Lie*代数，更确切地称之为*Lie*群G的

Lie 代数，并记为 $\boldsymbol{g}$（用大写字母表示 *Lie* 群，用相应的小写黑体字母表示其 *Lie* 代数）。*Lie* 群的 *Lie* 代数完全刻划了 *Lie* 群在幺元附近的结构。要研究 *Lie* 群在幺元附近的性质只要研究其 *Lie* 代数即可，这当然使问题大为简化。但是 *Lie* 代数仅刻划了 *Lie* 群在幺元附近的局部性质，而不能反映其整体性质。例如例 1，全体实数 $\mathbb{R}$ 对加法运算所构成的一维 *Lie* 群与例 9 绕固定轴的转动群（可用单位圆周作为其几何模型），其 *Lie* 代数是相同的，但其整体结构显然是不同的。

设 G 是一个 r 维 *Lie* 群，取定幺元 e 的一个邻域 U，在 U 中取定坐标系 $\{U,\varphi\}$，并取 e 为坐标原点：

$$\varphi(e)=(0,0,\cdots 0)$$

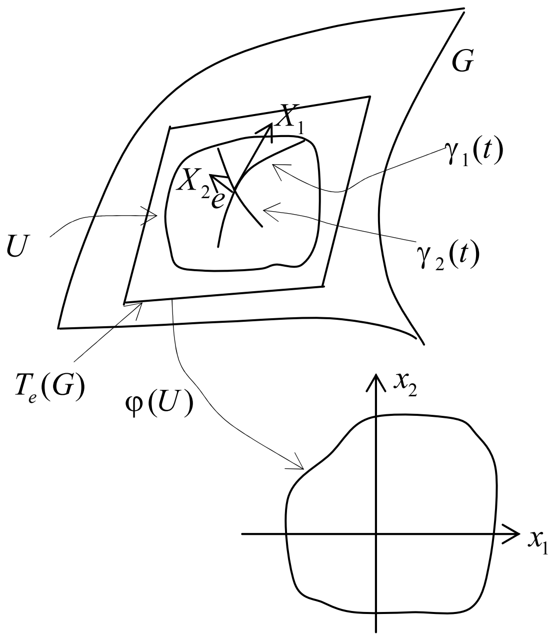

图 4.1

$$\begin{cases}\gamma_j(t), & j=1,2,\cdots,r\\ \varphi(\gamma_j(t))=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(j-1)\text{个零}},t,0,\cdots,0)\end{cases}\qquad(4.11)$$

为其 r 条坐标曲线。

以 $X_j=\gamma_j'(0),\quad j=1,2,\cdots,r$ 记为其在幺元处的切向量。即：$X_j\in T_e(G)=\boldsymbol{g}\quad j=1,2,\cdots,r.$ 显然，$\{X_1,X_2,\cdots,X_r\}$ 可取作为向量空间 $T_e(G)$ 的基——$T_e(G)$ 中任一向量可用它们的线性组合表出。由于 $[X_i,X_j]\in\boldsymbol{g}$，所以

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{\ k}X_k\quad i,j=1,2,\cdots,r.$$

这 r^3 个数 $\{C_{ij}^{\ k}\}k,i,j=1,2,\cdots,r$ 称为 *Lie* 群 $\boldsymbol{g}$ 以 $\{X_1,X_2,\cdots,X_r\}$ 为基的结构常数。

对 $\boldsymbol{g}$ 中任意向量 X,Y，

$$X=\sum_{j=1}^{r}\xi^jX_j,\qquad Y=\sum_{j=1}^{r}\eta^jX_j.$$

$$X\sim(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^r),\quad Y=(\eta^1,\eta^2,\cdots\eta^r).$$

$$Z=[X,Y]=[\sum_{j=1}^{r}\xi^{j}X_{j},\sum_{k=1}^{r}\eta^{k}X_{k}]=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j,k=1}^{r}C_{jk}{}^{i}\xi^{j}\eta^{k}X_{i} \qquad (4.12)$$

将 Z 也用坐标表示：

$$Z=\sum_{i=1}^{r}\zeta^{i}X_{i}, \qquad Z\sim(\zeta^{1},\zeta^{2},\cdots\zeta^{r}).$$

由(4.12)即得：

$$\zeta^{i}=\sum_{j,k=1}^{r}C_{jk}{}^{i}\xi^{j}\eta^{k}, \quad i=1,2,\cdots,r. \qquad (4.13)$$

由此可见一个 Lie 代数，完全由其结构常数决定。

当然结构常数与基的选取有关。基改变时相应的结构常数也随之改变。Lie 代数的一个重要的基本问题是如何选取适当的基，使相应的结构常数最简单。

由 Lie 代数的基本性质(4.8),(4.9),(4.10)易知结构常数有下列重要性质：

(1). $C_{ij}{}^{k}=-C_{ji}{}^{k} \qquad i,j,k=1,2,\cdots,r \qquad (4.14)$

(2). $\sum_{l=1}^{r}(C_{ij}{}^{l}C_{lk}{}^{m}+C_{jk}{}^{l}C_{li}{}^{m}+C_{ki}{}^{l}C_{lj}{}^{m})=0 \qquad i,j,k,m=1,2,\cdots,r. \qquad (4.15)$

例 12. 在例 8 的群 T_2 中，$\gamma_1(t)=\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-\infty<t<\infty$，与 $\gamma_2(t)=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-\infty<t<\infty$. 是过幺元的两条曲线，也是两个单参数子群。它们在幺元处的切向量分别为 $X_1=\gamma_1{}'(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与为 $X_2=\gamma_2{}'(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此 Lie 群 T_2 的 Lie 代数 $\mathbf{t}_2$ 的基有 X_1,X_2 组成。现在来求 $\mathbf{t}_2$ 相对于这组基的结构常数：

$$[X_1,X_1]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [X_2,X_2]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X_1,X_2]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=X_2.$$

所以 $\quad C_{11}{}^{1}=C_{11}{}^{2}=C_{22}{}^{1}=C_{22}{}^{2}=0, \quad C_{12}{}^{1}=-C_{21}{}^{1}=0, \quad C_{12}{}^{2}=1, \quad C_{21}{}^{2}=-1.$

例 13．现在来求 Lie 群 $SO(3)$ 的 Lie 代数 $SO(3)$ 及其结构常数。

我们取 $SO(3)$ 绕 x, y, z 轴的转动，

$$g_x(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos t&-\sin t\\0&\sin t&\cos t\end{pmatrix},\quad g_y(t)=\begin{pmatrix}\cos t&0&\sin t\\0&1&0\\-\sin t&0&\cos t\end{pmatrix}.$$

$$g_z(t)=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

显然，这是 $SO(3)$ 的三个单参数子群，它们在幺元处的切向量分别为：

$$I_1=g_x{}'(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad I_2=g_y{}'(0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$I_3=g_z{}'(0)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

$\{I_1, I_2, I_3\}$ 构成 $SO(3)$ 的 *Lie* 代数 $SO(3)$ 的一组基。（$\because$ $SO(3)$ 是 $\dfrac{3(3-1)}{2}=3$ 维 *Lie* 群，所以 $SO(3)$ 是一个三维线性空间）。它们的 *Lie* 乘法为：

$$[I_1,I_2]=I_1I_2-I_2I_1=I_3,$$

$$[I_2,I_3]=I_1,\qquad [I_3,I_1]=I_2. \tag{4.18}$$

由(4.18)即求得 $C_{12}{}^1=0, C_{12}{}^2=0, C_{12}{}^3=1,\cdots$.

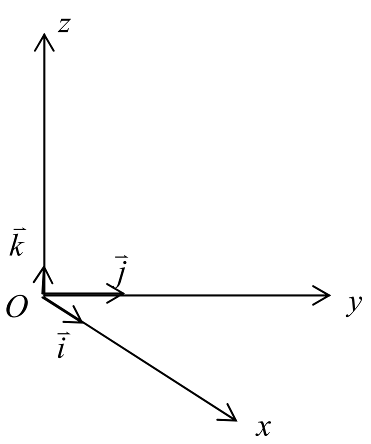

图 4.2

若在三维空间 $\mathbb{R}_3$ 中取基向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$，在解析几何中熟知它们的向量积为：

$$\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{j}&=\vec{k}=-\vec{j}\times\vec{i}\\ \vec{j}\times\vec{k}&=\vec{i}=-\vec{k}\times\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{i}&=\vec{j}=-\vec{i}\times\vec{k}\end{aligned} \tag{4.19}$$

可见 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的向量乘法，就是 I_1, I_2, I_3 的 *Lie* 乘法。

Lie 的三基本定理：

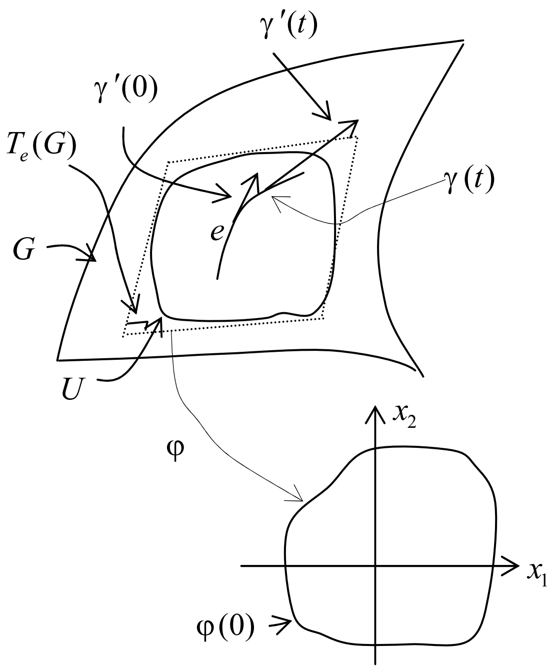

图 4.3

现在再回来讨论 *Lie* 群及其乘法函数。

在 r 维 *Lie* 群 G 中取幺元 e 的一个邻域 U，在 U 中取定坐标系 $\{U,\varphi\}$，并取 e 位坐标原点：

$$\varphi(e)=(0,0,\cdots,0)$$

$$g\sim(x_1,\cdots x_r)$$

对 U 中三元素 $h\sim(y_1,\cdots,y_r)$

$$k\sim(z_1,\cdots,z_r)$$

(4.20)

设 G 在坐标系 $\{U,\varphi\}$ 中的乘法函数为：

$$f_1(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r),$$
$$\cdots f_r(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r).$$

由(2.3)

$$z_1=f_1(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_r=f_r(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r).$$

(4.21)

(4.21)两边对 $y_1,\cdots,y_r$ 求导，并令 $y_1=y_2=\cdots=y_r=0$ 得：

$$\left.\frac{\partial z_j}{\partial y_k}\right|_{y_1,\cdots,y_r=0}=\left.\frac{\partial f_j(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r)}{\partial y_k}\right|_{y_1,\cdots,y_r=0} \tag{4.22}$$

$$\overset{\text{记为}}{=} l_{jk}(x_1,\cdots,x_r)$$

我们称 $\{l_{jk}(x_1,\cdots,x_r)\}_{j,k=1,\cdots,r}$ 为 *Lie* 群 G 的辅助函数。也可用矩阵记号记为：

$$L(x)=L(x_1,\cdots,x_r)=(l_{jk}(x_1,\cdots,x_r))_{j,k=1,\cdots,r.} \tag{4.23}$$

(4.19)又可写成：$L(x)=\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}$.

现在来研究乘法函数应满足结合律的关系式(2.5)。

$$f_j(x_1,\cdots,x_r;f_1(y_1,\cdots,y_r;z_1,\cdots,z_r),\cdots,f_r(y_1,\cdots,y_r;z_1,\cdots,z_r))$$
$$=f_j(f_1(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r),f_r(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r);z_1,\cdots,z_r)$$

（简记为 $f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$ (4.24)

上式两方对 $z_1,\cdots,z_r$ 求导，并令 $z_1,\cdots,z_r=0$，（来用简略记号）得：

$$\left.\frac{\partial f(x,w)}{\partial w}\right|_{w=f(y,0)} \bullet \left.\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial f(f(x,y),z)}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

即：$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}L(y)=L(f(x,y)) \tag{4.25}$$

若具体将坐标分量写出来，则上式即为：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_j(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r)}{\partial y_k}\bullet l_{ks}(y_1,\cdots,y_r)\\ &\quad = l_{js}(f_1(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r),\cdots,f_r(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r))\\ &\qquad\qquad j,s=1,2,\cdots,r.\end{aligned} \tag{4.26}$$

由此可见 *Lie* 群 G 的乘法函数 $f_j(x_1,\cdots,x_r;y_1,\cdots,y_r)=f(x,y)$，满足一组偏微分方程(4.26)。这组偏微分方程是由辅助函数 $l_{jk}(x_1,\cdots,x_r)=L(x)$ 所确定的。因此，只要知道了辅助函数就可以通过求解微分方程(4.23)而求得乘法函数。从而确定 *Lie* 群 G 的结构（在幺元附近）。这就是 **Lie 的第一基本定理**。

我们还可以进一步证明乘法函数适合微分方程组：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{r}(l_{ki}(x)\frac{\partial l_{sj}(x)}{\partial x_k}-l_{kj}(x)\frac{\partial l_{si}(x)}{\partial x_k})=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}{}^{k}l_{sk}(x)\\ &\qquad\qquad s,i,j=1,2,\cdots,r.\end{aligned} \tag{4.27}$$

这里 $C_{ij}{}^{k},k,j,i=1,2,\cdots,r.$ 就是 *Lie* 群 G 的 *Lie* 代数 $\mathbf{g}$ 在取定的坐标中的结构常数。

由此，*Lie* 群的辅助函数完全由其 *Lie* 代数的结构常数所确定。知道了结构常数只要解一组微分方程就可求得乘法函数。这就是 **Lie** 的第二基本定理。

我们知道 *Lie* 代数的结构常数满足关系式(4.14)与(4.15)，反之知道一组满足关系式(4.14)与(4.15)的数，就可以构造一个 *Lie* 代数，它以这组数为其结构常数。这就是 **Lie** 的第三定理。

所以 **Lie** 的三条基本定理，用现代的观点表达出来就是说：由 *Lie* 群唯一确定其 *Lie* 代数。反之由 *Lie* 代数也可在幺元附近完全确定 *Lie* 群。但是 *Lie* 代数不能确定 *Lie* 群的整体性质。要研究 *Lie* 群的整体性质必须用到更多的近代数学知识。有兴趣的学者可参看 *Lie* 群理论的专著。

（五）一些典型 *Lie* 群及其 *Lie* 代数

（1） 全线性群 $GL(n,\mathbb{R})$(或$GL(n,\mathbb{C})$ 由一切行列式不为零的 n 阶矩阵构成。

其 *Lie* 代数 $\mathbf{gl}(n,\mathbb{R})$(或 $\mathbf{gl}(n,\mathbb{C})$ 由一切 n 阶矩阵构成。（记为 $M(n,\mathbb{R})$ ） (5.1)

（2） 特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$。由行列式等于 1 的 n 阶矩阵构成，这是一个 n^2-1 维 *Lie* 群。

现在来求 $SL(n,\mathbb{R})$ 的 *Lie* 代数 $\mathbf{sl}(n,\mathbb{R})$.

设 $X(t)$. $-\infty<t<\infty$ 为 $SL(n,\mathbb{R})$ 的一个单参数子群，由于 $X(t)\in SL(n,\mathbb{R})$，所以：

$$\det(X(t))=1. \tag{5.2}$$

上式两边对 t 求导，并令等于 0，即得，

$$t_r(X'(0))=0. \tag{5.3}$$

这里的记号 t_r 表示取矩阵对角线元素之和。

（由(5.1)⇒(5.2)的推导利用了公式：

设 $X(t)=(x_{ij}(t))$，则，

$$\frac{d}{dt}(\det(X(t))=\begin{pmatrix} x_{11}'(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}'(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}'(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}'(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}'(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}'(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}'(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}'(t) \end{pmatrix}$$

及 $X(0)=I=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$).

再利用公式 $\det e^A=e^{trA}$. 可知，若 trA=0，则 $\det e^A=1$. 故得

$$\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})\mid trA=0\}. \tag{5.4}$$

（3） 特殊正交群 $SO(n)$.

设 $X(t).\quad -\infty < t < \infty$ 为 $SO(n).$ 的一个单参数子群，由(2.8)知，

$$X(t)X^t(t) = I \tag{5.5}$$

上式两边对 t 求导，并令 t 等 0，即得

$$X'(0) + (X^t)'(0) = 0 \tag{5.6}$$

反之，若 $A^t = -A$，则因 $\begin{aligned}&(e^A)^t = e^{A^t} = e^{-A}\\ &e^A(e^A)^t = e^Ae^{-A} = e^0 = I.\end{aligned}$

故得，

$$SO(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}. \tag{5.7}$$

即 $SO(n)$ 由反对称矩阵全体所构成。

因 $O(n)$ 得 *Lie* 代数与 $SO(n)$ 的 *Lie* 代数是相同的，所以

$$O(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}. \tag{5.8}$$

（4） 酉群 $U(n)$。

考虑复 n 维线性空间 $\mathbb{C}_n:(\zeta_1,\cdots,\zeta_n),\quad \zeta_k \in \mathbb{C}, k = 1,2,\cdots,n.$ 在 $\mathbb{C}$ 中定义 **Hermite** 内积 $<\bullet,\bullet>$。

$$\zeta = (\zeta_1,\cdots,\zeta_n),\quad w = (w_1,\cdots,w_n) \tag{5.9}$$

$$<\zeta, w> = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \bar{w}_k$$

Hermite 内积显然具有性质：

$$\left.\begin{aligned}&<\zeta_1+\zeta_2, w> = <\zeta_1, w> + <\zeta_2, w>.\\ &<\zeta, w> = \overline{<w,\zeta>}.\\ &<\zeta,\zeta> \geq 0,\quad <\zeta,\zeta> = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

设 U 为 $\mathbb{C}_n$ 上的线性变换，若

$$<U\zeta, Uw> = <\zeta, w>,\quad \forall \zeta, w \in \mathbb{C}_n. \tag{5.11}$$

则称 U 是一个酉变换，其矩阵称为酉矩阵。

易证酉矩阵全体成一群～酉群 $U(n)$.

由(5.11)容易推得 $U \in U(n) \Leftrightarrow U\bar{U}^t = I$。 (5.12)

即 $$U(n) = \{U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid U\bar{U}^t = I\} \tag{5.13}$$

用推导 $SO(n)$ 的关系(5.6)(5.7)得方法完全类似，可得：

$$\mathbf{u}(n)=\{V\in M(n,\mathbb{C})\mid \bar{V}^t=-V\} \tag{5.14}$$

即 $\mathbf{u}(n)$ 由全体反 **Hermite** 矩阵构成。

（5）辛群 $S_p(n)$

考虑 $2n$ 维线性空间 $\mathbb{R}_{2n}$： $x=(x_1,\cdots,x_n;\xi_1,\cdots,\xi_n)$ $y=(y_1,\cdots,y_n;\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 定义辛内积 $\omega(\bullet,\bullet)$ 如下：

$$\omega(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(x_k\eta_k-y_k\xi_k) \tag{5.15}$$

设 T 为 $\mathbb{R}_{2n}$ 中的一个线性变换，若

$$\omega(Tx,Ty)=\omega(x,y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}_{2n} \tag{5.16}$$

则称 T 为一辛变换，相应的矩阵称为辛矩阵。

全体辛变换构成一群——辛群 $S_p(n)$，这是一个 $2n$ 维 *Lie* 群，可以证明：

$$T\in S_p(n)\Leftrightarrow T^tJT=J \tag{5.17}$$

这里 $J=\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$ I_n为n阶幺阵。

同样可以证明

$$S_p(n)=\{A\in M(2n,\mathbb{R})\mid A^tJ+JA=0\} \tag{5.18}$$

（六）*Lie* 代数的结构与分类

先引进几个重要概念：

设 $\mathbf{g}$ 是一个 *Lie* 代数，$\mathbf{m_1}$ 与 $\mathbf{m_2}$ 为 $\mathbf{g}$ 中的非空子集，分别以 $\mathbf{m_1}+\mathbf{m_2}$ 与 $[\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}]$ 表示由 $\{m_1+m_2 \mid \underset{i=1,2}{m_i \in \mathbf{m}_i}\}$ 及 $\{[m_1,m_2] \mid m_i \in \mathbf{m}_{i\ i=1,2}\}$ 所张成的子空间。

定义　子代数与理想

Lie 代数 $\mathbf{g}$ 的子空间 $\mathbf{h}$，若满足

$$[\mathbf{h},\mathbf{h}] \subseteq \mathbf{h} \tag{6.1}$$

则称 $\mathbf{h}$ 为 $\mathbf{g}$ 的子代数。

若满足
$$[\mathbf{g},\mathbf{h}] \subseteq \mathbf{h} \tag{6.2}$$

则称 $\mathbf{h}$ 为 $\mathbf{g}$ 的理想。

（*Lie* 代数中的子代数与理想是与 *Lie* 群中的子群与不变子群相对应的概念）

定义　单 ***Lie*** 代数与半单 ***Lie*** 代数

设 $\mathbf{g}$ 为一 *Lie* 代数，显然 $\mathbf{g}$ 本身及由零向量构成的子代数都是 $\mathbf{g}$ 的理想。如 $\mathbf{g}$ 除这两个理想外不再有其他理想，则称 $\mathbf{g}$ 是单 *Lie* 代数；如 $\mathbf{g}$ 除了零向量外不包含任何可交换理想，则称 $\mathbf{g}$ 是半单 *Lie* 代数。今后我们主要讨论半单 *Lie* 代数的分类与结构。

例1.　群 $G=\left\{\begin{pmatrix} e^x & z \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \middle| x,y,z\in R\right\}$.

不难证明，G 是一个三维 *Lie* 群。

$$\gamma_1(t)=\left\{\begin{matrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| t\in R\right\},\quad \gamma_2(t)=\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{matrix} \middle| t\in R\right\},$$

$$\gamma_3(t)=\left\{\begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| t\in R\right\}.$$ 是 G 的三个单参数子群。

$\gamma_1'(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=X_1$，$\gamma_2'(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=X_2, \gamma_3'(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=X_3$ 是 G 的 *Lie* 代数 $\mathbf{g}$ 的一组基。

$$[X_1,X_2]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X_2,X_3]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-X_3$$

$$[X_3, X_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -X_3$$

由此得到 $\mathfrak{g}$ 的结构常数为：

$$C^k{}_{12} = 0, \quad k = 1,2,3.$$
$$C^1{}_{23} = C^2{}_{23} = 0, \quad C^3{}_{23} = -1$$
$$C^1{}_{31} = C^2{}_{31} = 0, \quad C^3{}_{31} = -1.$$

易见：

$$\mathfrak{h}_1 = \{\alpha X_2 + \beta X_3 \mid \alpha, \beta \in R\}$$
$$\mathfrak{h}_2 = \{\alpha X_3 + \beta X_1 \mid \alpha, \beta \in R\} \qquad \text{都是 } \mathfrak{g} \text{ 的子代数。}$$
$$\mathfrak{h}_3 = \{\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \alpha, \beta \in R\}$$

而且 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 还是 $\mathfrak{g}$ 的理想。

定义 *Lie* 代数的同构与同态

设 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 为二 *Lie* 代数，φ 是线性空间 $\mathfrak{g}_1$ 到线性空间 $\mathfrak{g}_2$ 的线性同构（线性同态）且满足：

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_1$$

则称 φ 是 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}_2$ 的同构（同态）。

定义 *Lie* 代数的线性表示与伴随表示

设 $\mathfrak{g}$ 为一 *Lie* 代数，$\mathfrak{gl}(V)$ 为线性 *Lie* 代数（$\mathfrak{gl}(V)$ 为 V 上一切非奇线性变换所构成的 *Lie* 群 $GL(V)$ 的 *Lie* 代数），φ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的同态映射，则称 φ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个线性表示，V 称为 φ 的表示空间，V 得维数称为表示 φ 的维数。

我们知道，*Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 本身就是一个线性空间。

取定 $X \in \mathfrak{g}$，对每一 $X \in \mathfrak{g}$ 令：

$$\begin{aligned} &Y \mapsto [X,Y] \\ &\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \end{aligned} \tag{6.3}$$

就定义了 $\mathfrak{g}$ 上的一个线性变换，记为 $ad\, X$，即：

$$ad\, X(Y) = [X,Y], \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \tag{6.4}$$

这样我们就引进了$\mathfrak{g}$的一种特殊的线性表示：

$$\begin{aligned} ad: \quad & X \mapsto ad\, X \\ & \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$\mathfrak{g}$的这个线性表示的表示空间就是$\mathfrak{g}$本身。我们称这个表示为$\mathfrak{g}$的伴随表示。它在研究 *Lie* 代数的结构与分类问题中（特别是半单 *Lie* 代数）起特别重要的作用。

伴随表示的重要性质：

$$①\ ad\,(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, ad\, X + \beta\, ad\, Y \tag{6.6}$$

$$②\ ad\,[X,Y] = [ad\, X, ad\, Y]. \tag{6.7}$$

①是容易证明的，我们仅证②。任取$Z \in \mathfrak{g}$，由伴随表示之定义及 *Jacobi* 恒等式知：

$$\begin{aligned} ad\,[X,Y](Z) &= [[X,Y],Z] = [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]] \\ &= [ad\, X(Z), Y] + [X, ad\, Y(Z)] \\ &= -ad\, Y(ad\, X(Z)) + ad\, X(ad\, Y(Z)) \\ &= [ad\, X, ad\, Y](Z). \end{aligned}$$

证毕。

伴随表示与结构常数的关系：

在 *Lie* 代数$\mathfrak{g}$中取定一组基$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，设其结构常数$\{C^k{}_{ij}\}$，$ad\, X_i(X_j) = [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C^k{}_{ij} X_k, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$。由此可见 ：

$$ad\, X_i \sim (C^k{}_{ij}), \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{6.8}$$

Killing 形式：

我们知道，在一个线性空间中引进了内积后就成为一个欧氏空间（酉空间）。欧氏空间的内容和解决问题的方法当然要比一般的线性空间丰富得多。由此得到启发，很自然地会想到在伴随表示的表示空间$\mathfrak{g}$中引进一种“内积”，同时我们的目的是研究伴随表示，所以引进的“内积”应该与伴随表示有密切的关系才有用。但这样的要求太高了，必须略为放宽一些要求，这就是下面定义的 **Killing** 形式。

对$X, Y \in \mathfrak{g}$，令

$$B(X,Y) = tr(ad\, X\, ad\, Y) \tag{6.9}$$

（这里$tr \sim$ 跡，$tr(A) =$矩阵A的对角线元素之和）

Killing 形式具有下列性质：

（1） 对称性 $B(X,Y) = B(Y,X).$

（2） 双线性 $$B(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha B(X,Z)+\beta B(Y,Z)$$
$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g},\alpha,\beta\in R(\text{或}\mathbb{C})$$

（3） 关于伴随表示不变性 $$B(ad\,X(Y),Z)+B(Y,ad\,(X)Z)=0.$$
$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}$$

(6.10)

性质(1)（2）由定义容易推得。现证(3)

$$B(ad\,X(Y),Z)=tr\,(ad\,([X,Y]ad\,Z)$$

$$=tr\,(ad\,X\,ad\,Y\,ad\,Z)-tr\,(ad\,Y\,ad\,X\,ad\,Z)$$

$$B(Y,ad\,X(Z))=tr\,(ad\,Y(ad\,[X,Z])$$

$$=tr\,(ad\,Y\,ad\,X\,ad\,Z)-tr\,(ad\,Y\,ad\,Z\,ad\,X)$$

再利用 $tr(ABC)=tr(CAB)$ 即得：

$$B(ad\,X(Y),Z)+B(Y,ad\,X(Z))=0.$$ 证毕。

由以上性质(3)可见，我们引进的 Killing 形式与伴随表示 ad 的密切关系。但 Killing 形式仅满足双线性的要求（性质(1)(2)），而不满足内积的正定要求。但对我们今后研究的半单 *Lie* 代数，它具有下列的非退化性质：

设 $\mathfrak{g}$ 为半单 *Lie* 代数，$X\in\mathfrak{g}$，若满足：$B(X,Y)=0,\quad\forall Y\in\mathfrak{g}$，则必有 $X=0.$

(6.11)

由于半单 *Lie* 代数的 Killing 形式非退化，所以在研究半单 *Lie* 代数的分类、性质与结构时起着重要的关键作用，正因如此，半单 *Lie* 代数的分类、结构问题已经做得非常完善彻底。

下面我们主要讨论半单 *Lie* 代数的结构与分类问题。

现在给定一组基时计算 Killing 形式：

在 $\mathfrak{g}$ 中取定一组基 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X,Y\in\mathfrak{g}\quad X=\sum_{j=1}^{n}x^jX_j\quad Y=\sum_{j=1}^{n}y^jX_j$，

$ad\,X_i(X_j)=[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}C^k{}_{ij}X_k$，$ad\,X=ad\,(\sum_{i=1}^{n}x^iX_i)=\sum_{i=1}^{n}x^i ad\,X_i$

$\therefore\quad ad\,X\sim(\sum_{i=1}^{n}x^iC^k{}_{ij})\quad ad\,Y\sim(\sum_{i=1}^{n}y^iC^k{}_{ij})$

$$B(X,Y)=tr(ad\,X\,ad\,Y)=\sum_{i,l,k,j=1}^{n}C^k{}_{ij}x^iC^j{}_{lk}y^l=\sum_{i,l=1}^{n}g_{il}x^iy^l. \tag{6.12}$$

这里 $$g_{il}=\sum_{k,j=1}^{n}C^j{}_{ik}C^k{}_{lj}\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{6.13}$$

(g_{il}) 称为 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 度量张量**。

Killing 形式非退化显然等于 $\det(g_{il})\neq 0$。

利用 Killing 形式，我们可以得到下面有用的引理：

引理　　设 $\mathbf{h}$ 是 *Lie* 代数 $\mathbf{g}$ 的理想，令

$$\mathbf{h}' = \{X \mid X\in\mathbf{g}, B(X,Y)=0, \forall Y\in\mathbf{h}\}$$

则 $\mathbf{h}'$ 也是 $\mathbf{g}$ 的理想。

证：　显然，$\mathbf{h}'$ 是 $\mathbf{g}$ 的子空间。又若 $X\in\mathbf{h}', A\in\mathbf{g},$ 则对任意 $Y\in\mathbf{h}$，有（见(6.10)）

$$B(ad\ A(X),Y)+B(X,ad\ A(Y))=0.$$

因 $\mathbf{h}$ 是 $\mathbf{g}$ 的理想，$Y\in\mathbf{h}$，$\therefore\quad ad\ A(Y)=[A,Y]\in\mathbf{h}$，故得

$$B(X,ad\ A(Y))=0,$$

因而　　$B(ad\ A(X),Y)=0.$ 所以　　$ad\ A(X)\in\mathbf{h}'$

即：　　$[A,X]\in\mathbf{h}'$　　　这就证明了 $\mathbf{h}'$ 也是 $\mathbf{g}$ 的理想。

现在来证明定理：

定理：　若 $\mathbf{g}$ 的 Killing 形式非退化，则 $\mathbf{g}$ 是半单 *Lie* 代数。（此定理之逆也成立，半单 *Lie* 代数之 Killing 形式非退化，证略）

证：　设 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{g}$ 的一个可交换理想，在 $\mathbf{g}$ 中选取一组基 $\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$，使 $\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$ 为 $\mathbf{n}$ 的基，则由结构常数的定义易见，关于基 $\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$ 的结构常数，有以下性质：

$$C^{s}{}_{i\bar{l}}=0,\qquad \bar{l}\le r, s>r.\quad i=1,2,\cdots,n$$
$$C^{\bar{t}}{}_{\bar{m}\bar{l}}=0,\qquad \bar{m},\bar{l},\bar{t}\le r$$

由此得 $\mathbf{g}$ 得 Cartan 度量张量具有性质：

$$g_{l\bar{m}}=\sum_{t,s=1}^{n}C^{t}{}_{ls}C^{s}{}_{\bar{m}t}$$
$$=-\sum_{\substack{t=1,\cdots,n\\ \bar{s}=1,\cdots,r}}C^{t}{}_{l\bar{s}}C^{\bar{s}}{}_{\bar{m}t}=\sum_{\substack{\bar{t}=1,\cdots,r\\ \bar{s}=1,\cdots,r}}C^{\bar{t}}{}_{l\bar{s}}C^{\bar{s}}{}_{\bar{m}\bar{t}}=0$$

所以　$\det(g_{ij})=0$　与假设不符。

故$\mathfrak{g}$中不存在非零可交换理想，即$\mathfrak{g}$为半单。 证毕。

现在来讨论在半单 *Lie* 代数中，如何选择适当的基，使它的结构常数最为简单的问题——Cartan-Weyl 形式。我们采用的方法是基于矩阵的特征值与特征向量，所以如同附录 3 中所介绍的，首先要将实半单 *Lie* 代数复化。

不妨一开始就假定所讨论的 *Lie* 代数是一个复半单 *Lie* 代数$\mathfrak{g}$（可以证明实半单 *Lie* 代数复化后所得的复 *Lie* 代数也仍为半单 *Lie* 代数）。

在$\mathfrak{g}$中取一组基$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。 (6.14)

取定$A \in \mathfrak{g}$， $A = \sum_{k=1}^{n} a^k X_k$ ，

现在来求 A 的伴随表示 $ad\ A$ 的特征根与特征向量：

$$ad\ A(X) = \rho X$$

即

$$[A, X] = \rho X. \tag{6.15}$$

设 $\mathfrak{g}$相对于基(6.14)的结构常数$\{C^k{}_{ij}\}_{k,i,j=1,\cdots,n}$， $X = \sum_{k=1}^{n} x^k X_k$ ，则(6.15)写成：

$$\sum_{k=1}^{n} (\sum_{i,j=1}^{n} C^k{}_{ij} a^i x^j) X_k = \sum_{k=1}^{n} \rho x^k X_k \tag{6.16}$$

(6.16)等价于

$$(\sum_{i,j=1}^{n} C^k{}_{ij} a^i x^j) - \rho x^k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{6.17}$$

(6.17)又可写成：

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (C^k{}_{ij} a^i - \rho \delta^k{}_j) x^j = 0. \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{6.18}$$

相应的特征方程为： $$\det(\sum_{i=1}^{n} (C^k{}_{ij} a^i - \rho \delta^k{}_j)) = 0. \tag{6.19}$$

特征方程(6.19)是 n 次代数方程，所以必有 n 个根（在复数域中），但这 n 个根可能有重根。为了简化，我们当然希望选择的基能使与 $ad\ A$ 相对应的矩阵是对角阵。最简单的办法当然是取 $ad\ A$ 的特征向量。但仅仅使$\mathfrak{g}$的某一个元素 A 的伴随表示 $ad\ A$ 的矩阵对角化是远远不够的。我们要求能使$\mathfrak{g}$中尽可能多的元素的伴随表示同时对角化，而由附录 2 知一组矩阵可同时对角化的充要条件是它们两两可交换，但因$[ad\ A, ad\ B] = ad[A, B]$(见(6.7))，所以 $ad\ A$与$ad\ B$ 可交换$\Leftrightarrow [ad\ A, ad\ B] = 0 \Leftrightarrow ad[A, B] = 0 \Leftrightarrow [A, B] = 0$ 。因此，关键在于求得$\mathfrak{g}$的极大可交换子代数 $\mathfrak{h}$。（当然还要求 $\mathfrak{h}$ 具有下面会提到的一些性质）

这样的可交换子代数（Abel 子代数）称为$\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数。我们在$\mathfrak{g}$中选取适当的基使 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的所有元素的伴随表示的矩阵同时对角化。

设 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的维数为 r，在 $\mathfrak{h}$ 中取一组基 $\{H_1,\cdots,H_r\}$。现在在 $\mathfrak{g}$ 中可选取一组基，使 $\mathfrak{h}$ 中任意元素 $A=\sum_{i=1}^{r}\lambda^i H_i$，其伴随表示同时对角化。（6.9）

显然，有 $ad\, A(H_k)=[A,H_k]=0,\quad k=1,2,\cdots,r.$

也就是说 A 的特征根有 r 个为 0（r 重特征根）。而且 A 的其他 $(n-r)$ 个（非零）特征根均为单根。

我们取与非零单根相应的特征向量（记为 E_α）（共 $(n-r)$ 个）与 $\{H_1,\cdots,H_r\}$ 共同构成 $\mathfrak{g}$ 的一组基。

设
$$[H_i,E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha \qquad i=1,\cdots,r. \tag{6.10}$$

则
$$[A,H_\alpha]=(\sum_{i=1}^{r}\lambda^i\alpha_i)E_\alpha=\alpha(A)E_\alpha \tag{6.11}$$

这里
$$\alpha(A)=\sum_{i=1}^{r}\lambda^i\alpha_i \tag{6.12}$$

我们称 $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 为半单 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个根，$\mathfrak{g}$ 的全部根的集合记为 Δ。

现在来研究相应于这组基 $\{H_1,\cdots,H_r,\underbrace{E_\alpha,E_\beta,\cdots}_{n-r}\}$ 的乘法表（结构常数）。我们已经知道：

$$[H_i,H_j]=0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,r) \tag{6.13}$$

$$[H_i,E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha \qquad (i=1,2,\cdots,r.\alpha\text{取}\mathfrak{g}\text{的一切根}) \tag{6.14}$$

现在要问 $[E_\alpha,E_\beta]=?$ 这里 α,β 是 $\mathfrak{g}$ 的两个根。

由 Jacobi 恒等式，任取 $A=\sum_{i=1}^{r}\lambda^i H_i$，则

$$[A,[E_\alpha,E_\beta]]+[E_\alpha,[E_\beta,A]]+[E_\beta,[A,E_\alpha]]=0$$

再由(6.10)得：

$$[A,[E_\alpha,E_\beta]]-\beta(A)[E_\alpha,E_\beta]+\alpha(A)[E_\alpha,E_\beta]=0$$

即
$$[A,[E_\alpha,E_\beta]]=(\alpha(A)+\beta(A))[E_\alpha,E_\beta].$$

亦即
$$ad\, A([E_\alpha,E_\beta])=(\alpha(A)+\beta(A))[E_\alpha,E_\beta]$$

由此可见，若 $\alpha+\beta$ 不是根，即 $\alpha+\beta\notin\Delta$，则必有 $[E_\alpha,E_\beta]=0.$

又若$\alpha+\beta$ 是 $\mathbf{g}$ 的一个根，即$\alpha+\beta\in\Delta$，则 $[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}$

而当$\alpha+\beta=0$ 时，（可以证明若α 为 $\mathbf{g}$ 的一个根，则$-\alpha$ 必定也是 $\mathbf{g}$ 的根，即若$\alpha\in\Delta$必有$-\alpha\in\Delta$）

可以证明 ： $[E_\alpha,E_{-\alpha}]=H_\alpha$， $H_\alpha\in\mathbf{h}$

因此采用了这组基$\{H_1,\cdots,H_r,E_\alpha,E_\beta,\cdots\}$，半单 *Lie* 代数 $\mathbf{g}$ 的乘法规律就可用下面简单的公式表示：

$$\begin{cases}[H_i,H_j]=0. \qquad i,j=1,2,\cdots,r.\\ [H_i,E_\alpha]=\alpha_iE_\alpha. \quad i=1,2,\cdots,r. \quad \alpha\in\Delta\\ [E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{a+\beta}, \quad \alpha,\beta\in\Delta \quad \alpha+\beta\neq0\\ \qquad\qquad \forall\alpha+\beta\notin\Delta,\ N_{\alpha\beta}=0\\ [E_\alpha,E_{-\alpha}]=H_\alpha\end{cases}$$

由此可见，采用了这组基（Cartan-Weyl 基），$\mathbf{g}$ 的结构常数就大为简化，由此可将其分类与结构问题完全搞清楚。

附录 1

用根的置换群理论解二、三次代数方程

（一） 利用用根的置换理论解二次方程。

设方程

$$x^2+px+q=0$$

有两个根 x_1 与 x_2，熟知根与系数之间有关系式

$$x_1+x_2=p,\quad x_1x_2=q.$$

这两个根的多项式有一个重要性质：将 x_1 换作 x_2，将 x_2 换作 x_1（以后将这种置换方法记为 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$），这两个多项式是不变的。我们将这种置换的作用记为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}:\quad x_1+x_2 \Rightarrow x_2+x_1,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}:\quad x_1x_2 \Rightarrow x_2x_1.$$

具有这种性质的多项式称为根的对称多项式。简称为对称多项式，又如

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2},\quad (x_1-x_2)^2$$

等都是对称多项式。但如

$$x_1+2x_2,\qquad x_1-x_2$$

等就不是对称多项式。例如，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}:\quad x_1+2x_2 \Rightarrow x_2+2x_1 \neq x_1+2x_2.$$

在关于根 x_1,x_2 的对称多项式中以 x_1+x_2,x_1x_2 为最简单，它们被称为基本对称多项式，且分别等于二次方程的系数 $-p$ 与 q。可以证明：

定理 任何关于根 x_1,x_2 的对称多项式，必可用基本对称多项式 x_1+x_2,x_1x_2 的多项式表出，也就是说，可以用方程的系数 p,q 的多项式表出。

这条定理的证明是不难的，但有些繁琐，有兴趣的读者可以在高等代数的书本中找到它的证明。我们在这里就把证明省略了。下面只是举几个例子来说明一下。（当然举例不能算是证明！）。

例：$(x_1-x_2)^2$ 与 $x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}$ 都是对称多项式，现在把它们表为 x_1+x_2 和 x_1x_2 或者说 p,q 的多项式：

$$(x_1-x_2)^2=x_1^{\ 2}-2x_1x_2+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q.$$

$$x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=(x_1+x_2)^3-3x_1^{\ 2}x_2-3x_1x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^3-$$
$$-3x_1x_2(x_1+x_2)=-p^3+3pq.$$

利用上面的定理及对称多项式的特点，就可以求得二次方程的解。事实上，已经知道 $x_1+x_2=-p$，若再能知道 x_1-x_2 等于什么，那就容易求得 x_1与x_2 了。x_1-x_2 若是对称多项式问题就好办（因为这时根据上面的定理，可以把 x_1-x_2 表示成已知数 p,q 的多项式，就等于求出了（x_1-x_2）。可惜它不是对称多项式，因为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}:\quad x_1-x_2 \Rightarrow (x_2-x_1)=-(x_1-x_2)$$

但从上面置换的结果容易想到 $(x_1-x_2)^2$ 应该是对称多项式：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}:\quad (x_1-x_2)^2 \Rightarrow (x_2-x_1)^2=(x_1-x_2)^2$$

因为 $(x_1-x_2)^2$ 是对称多项式，所以可以用 p,q 的多项式表示。事实上我们已经求得过 $(x_1-x_2)^2=p^2-4q.$ 因此，很容易求得，

$$x_1-x_2=\pm\sqrt{p^2-4q}.$$

利用

$$x_1+x_2=-p$$

$$x_1-x_2=\pm\sqrt{p^2-4q}$$

立即可求得：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q}) \\ x_2=\dfrac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4q}) \end{cases}.$$

这就是通常解二次方程的公式。

上面解二次方程的方法虽然没有提出什么新的结果(用通常的配方的方法似乎比这里还简单一些)。但它却显示了解代数方程的一种普通方法。因而循着这种方法的思路就容易得

到解三、四次方程的公式。

（二）利用根的置换群解三次方程。

考察三次方程，

$$x^3+px^2+qx+r=0. \tag{1}$$

设 x_1,x_2,x_3 是它的三个根，则由著名的韦达定理知，

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=-p \\ &x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q \\ &x_1x_2x_3=-r \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$x_1+x_2+x_3$， $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$， $x_1x_2x_3$ 这三个关于 x_1,x_2,x_3 的多项式具有这样的特点，它在对 x_1,x_2,x_3 的任何一种置换下都是不变的，根据排列的知识，可知这种置换共有 $6(=3!)$ 种。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

这里我们将置换

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_1&x_3&x_2\end{pmatrix}, \cdots$$

等省去 x 保留小标，简记为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\cdots$$

并将“不变” $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

也算作一种置换，称为恒等变换。同样我们把在上面 6 种置换作用下都不变得的多项式称为对称多项式。例如，不难验证

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad x_1^3+x_2^3+x_3^3,$$

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2,$$

等都是对称多项式，特别是(2)式中

$$x_1+x_2+x_3,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,\quad x_1x_2x_3$$

称为基本对称多项式。

同样可以证明：

定理 任何关于根 x_1, x_2, x_3 的对称多项式，必可用基本对称多项式(2)的多项式表示，也就是说，可用方程的系数 p, q, r 的多项表示。

这个定理的证明也从略，而只是用一些例子来说明。

例

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$= p^2 - 2q$$

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3 =$$
$$= -pq + 3r$$

现在就可以来讨论三次方程(1)的求解问题了。

我们已看到在解二次方程时起关键作用的是多项式 $x_2 - x_1$。这里 x_1与x_2 的系数是 1 与 -1，它们恰恰是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的两个根。因此，联想到，在解三次方程时与之相当的应该是方程 $x^3 - 1 = 0$ 的三个根。因为

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

所以，方程 $x^3 - 1 = 0$ 的三个根为 1，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

若记 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，则易证 $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \omega^2$.

故方程 $x^3 - 1 = 0$ 的三个根为：

$$1,\quad \omega,\quad \omega^2$$

这里 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，　且满足 $\omega^2 + \omega + 1 = 0.$ (4)

与解二次方程中起关键作用的多项式 $x_1 - x_2$ 相当的应该是多项式

$$\psi_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{5}$$

ψ_1 也不是对称多项式，在 6 种置换(3)作用下，ψ_1 分别为：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\psi_1$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2=\psi_2$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1=\psi_3$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3=\psi_4 \qquad (6)$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1=\psi_5$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}:\ \psi_1 \Rightarrow x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2=\psi_6$$

我们首先指出，x_1,x_2,x_3 可用 p,ψ_1,ψ_2 表示出来。

例如，因

$$\begin{aligned}-p+\psi_1+\psi_2 &= (x_1+x_2+x_3)+(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\\ &\quad +(x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2)\\ &= 3x_1+(1+\omega+\omega^2)x_2+(1+\omega^2+\omega x_3\\ &= 3x_1.\ （这里利用关系式(4)：\omega^2+\omega+1=0)\end{aligned}$$

所以 $$x_1=\frac{1}{3}(-p+\psi_1+\psi_2). \qquad (7)$$

类似地可以证明：

$$x_2=\frac{1}{3}(-p+\omega^2\psi_1+\omega\psi_2) \qquad (8)$$
$$x_3=\frac{1}{3}(-p+\omega\psi_1+\omega^2\psi_2) \qquad (9)$$

从(7),(8),(9)看出，要是 ψ_1 与 ψ_2 的值能够求得，则 x_1,x_2,x_3 就能出来了。于是问题转化为求 ψ_1 与 ψ_2。

如果 ψ_1 与 ψ_2 是 x_1,x_2,x_3 的对称多项式，那么只要根据定理把它们表示成 p,q,r 的多项式，就求出了 ψ_1 与 ψ_2 的值。但遗憾的它们不是对称多项式，我们必须把问题扩展一下。

很容易看出，不仅 ψ_1，而且 $\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6$ 中的任一个在 6 种置换(3)作用下的结果，都分别是 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6$ 的某个秩序的排列。这就是说在 6 种置换(3)的作用下，下面关于 t 的方程：

$$(t-\psi_1)(t-\psi_2)(t-\psi_3)(t-\psi_4)(t-\psi_5)(t-\psi_6)=0, \tag{10}$$

总是不变的。（因为任何一种置换作用于此方程的结果，不过是将其因子的秩序重新排列一下而已）。这样一来，可见(10)系数必定都是对称多项式。因而都可用 p,q,r 的多项式表示出来。我们希望能从方程(10)中解出 ψ_1 与 ψ_2。但(10)是六次方程，好像问题比原来要求解三次方程(1)更困难了。其实不然！因(10)虽然是六次方程，但由(6)知，

$$\begin{aligned}&\psi_6=\omega\psi,\quad \psi_3=\omega^2\psi_1.\\&\psi_4=\omega\psi_2,\quad \psi_5=\omega^2\psi_2.\end{aligned} \tag{11}$$

所以，

$$\begin{aligned}(t-\psi_1)(t-\psi_6)(t-\psi_3)&=(t-\psi_1)(t-\omega\psi_1)(t-\omega^2\psi_1)\\&=t^3-\left(\omega^2+\omega+1\right)\psi_1t^2+\left(\omega^2+\omega+1\right)\psi_1{}^2t-\psi_1{}^3\\&=t^3-\psi_1{}^3.\end{aligned}$$

同样有：

$$(t-\psi_2)(t-\psi_4)(t-\psi_5)=t^3-\psi_2{}^3.$$

于是，方程(10)就成为

$$(t^3-\psi_1{}^3)(t^3-\psi_2{}^3)=0.$$

或

$$t^6-(\psi_1{}^3+\psi_2{}^3)t^3+\psi_1{}^3\psi_2{}^3=0. \tag{12}$$

一方面，方程(12)应该和(10)一样，其系数是 p,q,r 的多项式，是已知的。实际上可以求出，

$$\begin{aligned}&\psi_1{}^3+\psi_2{}^3=-2p^3+9pq-27r\\&\psi_1{}^3\psi_2{}^3=(p^2-3q)^3\end{aligned}$$

另一方面，方程(12)实际上可以化成二次方程求解。这只要将 t^3 看成一个未知量。从(12)即可解得

$$\begin{aligned}t^3&=\frac{\psi_1{}^3+\psi_2{}^3\pm\sqrt{(\psi_1{}^3+\psi_2{}^3)^2-4\psi_1{}^3\psi_2{}^3}}{2}\\&=\frac{-2p^3+9pq-27r+\sqrt{(-2p^3+9pq-27r)^2-4(p^2-3q)^3}}{2}\end{aligned}$$

知道了 t^3，即易求得 t，即得方程(10)之 6 个根 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6$。知道了 ψ_1 与 ψ_2，再根据(8)(9)即可求得原来三次方程的三个根 x_1,x_2,x_3。这样，三次方程的求解问题就完全解决了。

遵循上面的方法的思路可以求得四次方程的解，但是要更复杂一些，不再具体介绍了。

附录 2　将一组矩阵同时对角化的问题

（一） **线性空间、基、坐标、线性变换、矩阵。**

V ——线性空间（n 维）

取定 V 中一组线性无关向量 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

作为基，对 V 中任意向量 x, y

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \quad x \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \quad y \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad x, y \text{ 在基 } \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \text{ 中的坐标。} \tag{1}$$

设 A 为在 V 上定义的线性变换：

$$\begin{aligned} A:\ & V \to V \\ & x \mapsto y = Ax \end{aligned} \tag{2}$$

满足 $A(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 A x_1 + a_2 A x_2$

设 $Ae_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_k \qquad j = 1, \cdots, n$ (3)

则
$$Ax = A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \bullet x_j) e_k$$
$$= y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$$

所以 $$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

用矩阵记号：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (a_{kj}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 这里 (a_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

也就是说，取定一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则线性变换 A 与矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ 相对应。若在 V 中取另一组基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$，则向量 x, y 的坐标及线性变换 A 所对应之矩阵也要随之而变。

设 $$f_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} e_j \quad , \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

x, y 在这组基 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 的坐标为 $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \cdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix}$，即

$$x = \sum_{l=1}^{n} \overline{x}_l f_l, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \overline{y}_l f_l$$

则 $$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{l=1}^{n} \overline{x}_l f_l = \sum_{l} \overline{x}_l \sum_{j} t_{jl} e_j$$

$$= \sum_{j} (\sum_{l} t_{jl} \overline{x}_l) e_j$$

故得新的坐标之间的变换关系相应也有：

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{l=1}^{n} t_{jl} \overline{x}_l \\ y_j &= \sum_{l=1}^{n} t_{jl} \overline{y}_l \end{aligned} \quad . \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

代入(4)，得

$$\sum_{l=1}^{n} t_{kl} \overline{y}_l = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \sum_{l=1}^{n} t_{jl} \overline{x}_l \quad , \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

写成矩阵形式

$$(t_{kl}) \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \cdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix} = (a_{kj})(t_{jl}) \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

由此，即得：

$$\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \cdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix} = (t_{kl})^{-1} (a_{kj})(t_{jl}) \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = (\overline{a}_{kl}) \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

这里 $(t_{kl})^{-1}$ 表示矩阵 (t_{kl}) 的逆阵，即

$$(\overline{a}_{kj}) = (t_{kl})^{-1}(a_{kj})(t_{jl}) \tag{11}$$

这就是基变换时，线性变换对应的矩阵变换的规律。并称矩阵 $(\overline{a}_{kj})$ 与 (a_{kj}) 是相似的。重要的问题就是如何选取适当的基，使它在这组基下对应的矩阵形式最简单。

下面我们讨论一种重要的特殊情况：

设　线性变换 A 在某一组基中其对应的矩阵为对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，现在要问如何求得这组基及相应的矩阵对角线上的元素 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$？

设线性变换 A 在基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下对应的矩阵为 (a_{ij})，而在基 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 中相应的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$。

由(3)知：

$$Af_j = \lambda_j f_j \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{12}$$

我们称 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 之特征值，$f_1,\cdots,f_n$ 为相应之特征向量。

设 f_j 在基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中的坐标为：

$$\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix} \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{13}$$

则由(4)在以 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为基的坐标系中，(12)可写成：

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} f_{jl} = \lambda_j f_{jk} \qquad j,k = 1,2,\cdots,n \text{。} \tag{14}$$

上式又可写成：

$$\sum_{l=1}^{n} (a_{kl} - \delta_{kl}\lambda_j) f_{jl} = 0. \tag{15}$$

这里 $$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

对每一取定的 j，(15)是一个其次线性方程组，它有非全零解的充要条件是：

$$\det(a_{kl}-\delta_{kl}\lambda j)=0. \tag{16}$$

即：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda_j \end{vmatrix}=0$$

也就是说 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 必须是特征方程：

$$\det(a_{kl}-\delta_{kl}\lambda)=0. \tag{17}$$

的解。(17)是 λ 的 n 次代数方程，它必有 n 个根。（可能是复数，也可能有重根）

所以矩阵对角化的问题，归结为首先解特征方程(17)求得其 n 个根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，然后将此 n 个根代入(14)，解得 $f_j=\begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_n} \end{pmatrix}$， $j,k=1,2,\cdots,n$。若能选取一组线性无关的 $f_1,\cdots,f_n$，则以 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 为基时线性变换 A 相应的矩阵即为对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$。

$\because \quad f_j=\sum_{k=1}^{n} f_{jk}e_k$ ，所以由(6)、(11)知

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}=(f_{kl})^{-1}(a_{kj})(f_{jl}) \tag{18}$$

一组矩阵同时对角化的问题：

上面我们讨论了如何选取适当的基，使一线性变换所对应的矩阵是对角矩阵的问题，而在 *Lie* 代数中我们遇到的问题，却是如何选取适当的基，使一组（有限个，或无限个）矩阵同时对角化的问题。

下面我们来证明一条重要的定理：

定理　设 $S=\{A,B,\cdots\}$ 为一组矩阵构成的集合（S 可以是有限集，也可以是无限集），S 中每一矩阵均可对角化，则这组矩阵可同时对角化的充要条件是它们两两可交换，即对任意 $A,B\in S$ 有 $AB=BA$。

证：先证必要性。设 S 可同时对角化，即存在一非奇矩阵 $T=(t_{ij})$，使 $T^{-1}AT$，$T^{-1}BT$，$\cdots$ 同时为对角阵。

即

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix},\quad T^{-1}BT=\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix},\quad \cdots$$

亦即 $$A=T\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}T^{-1},\quad B=T\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}T^{-1},\quad \cdots$$

由于任意二个对角矩阵必可交换：

$$\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_{A_1}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\lambda_{B_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}$$

所以 $$\begin{aligned}AB&=T\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}T^{-1}\\
&=T\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}T^{-1}\\
&=T\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}T^{-1}\\
&=T\begin{pmatrix}\lambda_{B_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{B_n}\end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}T^{-1}\\
&=BA\end{aligned}$$

这就证明必要性。

再证充分性：

设已将矩阵 A 对角化：$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}$，先设 A 之特征根无重根，即 $\lambda_{A_1},\cdots,\lambda_{A_n}$ 两两不相等。在 S 中任取一矩阵 B，现证 $T^{-1}BT$ 也是对角阵。

设 $T^{-1}BT=(\beta_{ij})$，由于 A 与 B 可交换，所以 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 也可交换。

即
$$\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}(\beta_{ij})=(\beta_{ij})\begin{pmatrix}\lambda_{A_1} & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix} \tag{19}$$

将(14)具体写出，即得：

$$\begin{pmatrix}\lambda_{A_1}\beta_{11} & \lambda_{A_1}\beta_{12} & \cdots & \lambda_{A_1}\beta_{1n}\\ \lambda_{A_2}\beta_{21} & \lambda_{A_2}\beta_{22} & \cdots & \lambda_{A_2}\beta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_{A_n}\beta_{n1} & \lambda_{A_n}\beta_{n2} & \cdots & \lambda_{A_n}\beta_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_{A_1}\beta_{11} & \lambda_{A_2}\beta_{12} & \cdots & \lambda_{A_n}\beta_{1n}\\ \lambda_{A_1}\beta_{21} & \lambda_{A_2}\beta_{22} & \cdots & \lambda_{A_n}\beta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_{A_1}\beta_{n1} & \lambda_{A_2}\beta_{n2} & \cdots & \lambda_{A_n}\beta_{nn}\end{pmatrix}$$

由此得：

$$\lambda_{A_1}\beta_{ij}=A_{Aj}\beta_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

即： $(\lambda_{A_i}-\lambda_{A_j})\beta_{ij}=0$

由于假设，$\lambda_{A_i}\neq\lambda_{A_j}$，$i\neq j$， 所以

$$\beta_{ij}=0,\quad i\neq j$$

即 (β_{ij}) 为对角阵。由于 B 为 S 中任取的一矩阵，这就证明了 S 中的所有矩阵已同时对角化。

其次，设 A 之特征根有重根，为简单起见，不妨设 $\lambda_{A_1}=\lambda_{A_2}=\lambda_0$，而其余 $n-2$ 个特征根 $\lambda_{A_3},\cdots,\lambda_{A_n}$ 则两两不相等。

设此时 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ & \lambda_0 & & O & \\ & & \lambda_{A_3} & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{A_n}\end{pmatrix}$，相应的基为 $f_1,\cdots,f_n$。

我们将 n 维线性空间 V 分解成 $V_1\oplus V_2$，其中 V_1 以 f_1,f_2 为基，V_2 以 $f_3,\cdots,f_n$ 为基。

任取一 $B \in S$，则不难证明 $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & & & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & O & \\ & & \lambda_{B_3} & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{B_n} \end{pmatrix}$

现在在 V_1 中选取合适的基 $\{g_1, g_2\}$，将 $\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ 对角化为 $\begin{pmatrix} \lambda_{B_1} & O \\ O & \lambda_{B_2} \end{pmatrix}$，于是若以 $\{g_1, g_2, f_3, \cdots, f_n\}$ 为基，则 A 与 B 相应之矩阵均已对角化（因 A 在 S_1 部分的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_0 & O \\ O & \lambda_0 \end{pmatrix}$。所以对 V_1 中任意一组基，其相应的矩阵均为同一对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_0 & O \\ O & \lambda_0 \end{pmatrix}$）。

如此继续用上述方法处理 S 中其他矩阵，即使 S 中所有矩阵同时对角化。这就证明了充分性。

附录 3　实问题的复化方法

数学上有一些纯属实数范围中的问题，但若囿于实数域中讨论问题就很难解决，甚至无法解决。但一旦解放思想将问题延拓，扩展到复数域中来考虑，就能找到有效的解决方法。例如，要计算积分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$，这纯粹是一个实数域上的问题，直接计算是比较困难的，但若将问题延拓到复平面上，则利用复变函数的方法就很容易求得此积分之值。

又如要证明方程 $x^3+y^3=z^3$ 没有非零整数解（$n=3$ 的 *Fermat* 问题），尽管这是一个纯粹的实问题，但是它的证明方法却必须在复数域中进行讨论。而且对此问题，到目前为止还没有找到涉及复数的证明方法。

在我们要讨论的 *Lie* 代数的分类与结构问题中，实问题的复化方法也是其中重要的一步。因为我们所讨论的 *Lie* 群其流形均为实流形（广义坐标为实数），因而其切向量空间是实向量空间。在其中任意取定一组基，其坐标必为实数，对向量的运算也只能用实数相乘，线性变换对应的矩阵一定是实矩阵。实矩阵的特征方程系数一定是实数，但其根却可能是复数，由这种复的特征值解得的特征向量的分量也是复数，也就是说不是实向量空间中的向量，或者说在实向量空间中无解，因而无法将这种矩阵对角化。为此，必须采用实问题复化的方法，将实向量空间构成的实 *Lie* 代数复化成复向量空间上的复 *Lie* 代数，然后再来实施矩阵对角化化简的方法。具体做法如下：

设 $\mathfrak{g}$ 为一实 *Lie* 代数，在 $\mathfrak{g}$ 中任意取定一组基 $\{X_1,\cdots,X_n\}$，则 $\forall X\in\mathfrak{g},\quad X=\sum_{j=1}^n x^jX_j$。这里 $x^1,x^2,\cdots,x^n\in R$，反之，任取一组 $x^1,x^2,\cdots,x^n\in R$，则 $\sum_{j=1}^n x^jX_j$ 必为 $\mathfrak{g}$ 中一元素（向量）。$\mathfrak{g}$ 中的 *Lie* 乘法由其结构常数确定：

$$[X_1,X_j]=\sum_{k=1}^n C^k{}_{ij}X_k \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \quad \text{这里} \{C^k{}_{ij}\}_{k,i,j=1,\cdots,n} \text{均为实数。}$$

现构造复 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$（实 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 之复化）

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\{\sum_{k=1}^n (x^k+iy^k)X^k \,|, x^k,y^k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,n\}$$

也就是说 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是形式上由 $X_1,\cdots,X_n$ 的一切复系数的线性组合构成。在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中定义加法

与数量（复数）乘法如下：

$$\mathbb{Z}_1 = \sum_{k=1}^{n} (x^k{}_1 + iy^k{}_1) X_k \in \mathbf{g}_{\mathbb{C}}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \sum_{k=1}^{n} (x^k{}_2 + iy^k{}_2) X_k \in \mathbf{g}_{\mathbb{C}}$$

$$a = a + bi \in \mathbb{C}$$

将 $x^k{}_1 + iy^k{}_1$， $x^k{}_2 + iy^k{}_2$ 分别记为 $z^k{}_1$ 与 $z^k{}_2$

$$\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 \overset{\text{def.}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (z^k{}_1 + z^k{}_2) X_k \in \mathbf{g}_{\mathbb{C}}$$

$$a\mathbb{Z}_1 \overset{\text{def.}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \alpha z^k{}_1 X_k \in \mathbf{g}_{\mathbb{C}}$$

我们又可将 $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ 中任一元素 $\mathbb{Z} = \sum_{k=1}^{n} z^k\ X_k = \sum_{k=1}^{n} (x^k + iy^k) X^k$ 写成：

$$\mathbb{Z} = \sum_{k=1}^{n} x^k\ X_k + i\sum_{k=1}^{n} y^k\ X_k = X + iY.$$

这里 $X, Y \in \mathbf{g}$ 。

现在在 $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ 中定义 *Lie* 乘法如下：

将 $\mathbb{Z}_1$ 与 $\mathbb{Z}_2$ 分别写成 $Z_1 = X_1 + iY_1$， $Z_2 = X_2 + iY_2$

$$\begin{aligned} Z &= [Z_1, Z_2] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] \\ &\overset{def.}{=} [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i[X_1, Y_2] + i[X_2, Y_1] \in \mathbf{g}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

对复 *Lie* 代数 $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ 进行化简、分类时，就可以充分发挥矩阵对角化的技巧，不会再像实 *Lie* 代数中发生特征根是复数的困难。但这里还存在一个关键问题：我们研究的对象是实 *Lie* 代数，但用上面复化方法得到的结果却是对复 *Lie* 代数而言，这两者之间有什么关系？我们已看到了从一个实 *Lie* 代数出发，通过复化的方法可以得到唯一的一个复 *Lie* 代数。(表面上看来我们提出的方法与基的选取有关，但可证明，取任意二组基复化所得的二个复 *Lie* 代数一定是同构的)。但可以证明本质不同的几个实 *Lie* 代数（即几个互不同构的实 *Lie* 代数）。其复化的结果却可以是同一复 *Lie* 代数。例如，特殊酉群 $SU(n)$ （行列式为 1 的酉矩阵所构成的 *Lie* 群）的 *Lie* 代数 $su(n)$ 与特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$ 的 *Lie* 代数 $sl(n,R)$ 是两个不

同构的实 *Lie* 代数。但它们的复化却是同一复 *Lie* 代数：$sl(n,\mathbb{C})$（复特殊线性群 $SL(n,\mathbb{C})$ 的 *Lie* 代数），对单 *Lie* 代数这一问题也已完全解决：我们已经弄清楚，一个典型的复单 *Lie* 代数，究竟对应哪几个互不同构的实单 *Lie* 代数。这样就完全解决了实单 *Lie* 代数的分类问题，具体的做法见讲义（六）*Lie* 代数的分类与结构。